אלגברה לינארית הרחבת הסמכה (בן גוריון), סמטסטר ב׳ תש״פ

מבחן לדוגמה 2

מרצה: אחיה בר-און.
מתרגל: ד״ר דניס גלוקו.
אורך המבחן: 3 שעות.
חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.
הנחיות:

- יש לענות על **כל** 4 השאלות .
- השאלות לא מסודרות בהכרח לפי רמת קושי- מומלץ להתחיל עם שאלות שאתם יודעים לפתור.
- נמקו תשובתכם.

.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שאתם יודעים לענות. חלקו את זמנכם בתבונה!

בהצלחה! ☺

.1

(א) נתונה מערכת משוואות לינאריות (מעל $\mathbb{R}$) התלויה בפרמטר k.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + kx_3 & = 1 \\ 2x_1 - (k+1)\,x_2 + 6x_3 & = 2 \\ 3x_1 - (k+3)\,x_2 + 6x_3 & = k \end{cases}$$

i. קבעו לאילו ערכי k יש למערכת הבאה פתרון יחיד, אין פתרון, או אינסוף פתרונות. נמקו כל קביעה.

ii. עבור ערכי k שלמערכת יש אינסוף פתרונות - מצאו אותם.

(ב) יהא V מ"ו ויהיו W_1, W_2, W_3 ת"מ. הוכיחו/הפריכו:

i. מתקיים $(W_1 + W_2) \cap (W_1 + W_3) \subseteq W_1 + (W_2 \cap W_3)$.

ii. מתקיים $(W_1 + W_2) \cap (W_1 + W_3) \supseteq W_1 + (W_2 \cap W_3)$.

.2

(א) קבעו האם המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

הפיכה. במידה והיא הפיכה, מצאו את ההפוכית A^{-1}.

i. (שאלה נוספת שלא קשורה למבחן, הועלתה תוך כדי שיעור חזרה) נניח $\{v_1, v_2, v_3\}$ בת"ל ב $\mathbb{R}^3$. הוכיחו כי $\{Av_1, Av_2, Av_3\}$ בת"ל ב $\mathbb{R}^3$ (המטריצה A ממקודם).

(ב) תהא A מטריצה ריבועית (לא A מסעיף קודם!). הוכיחו/הפריכו:

i. אם A הפיכה אז מהשיוויון $AB = AC$ ניתן להסיק כי $B = C$ (לכל שתי מטריצות B, C).

ii. אם A אינה הפיכה אזי ייתכן כי $AB = AC$ אבל $B \neq C$

.3

(א) מצאו לאילו ערכי $k \in \mathbb{R}$ מתקיים כי הקבוצה

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ k & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -k & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1+2k \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -k & 0 \\ k-k^2 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

פורשת את $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

(ב) יהא V מ"ו ויהיו $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ בסיס ל V. הוכיחו/הפריכו: הקבוצה $\{v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_1 + v_3\}$ גם בסיס של V.

.4

(א) יהיו

$$W_1 = \text{Null}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 3 & -7 & 9 \end{pmatrix}, W_2 = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

שני תתי מרחבים של $\mathbb{R}^3$ (תזכורת: $\text{Null}A$ היא קבוצת כל הפתרונות למערכת $Ax = 0$).

i. מצאו בסיס ומימד ל W_1.

ii. הציגו את W_2 ע"י משוואות.

iii. מצאו בסיס ל $W_1 \cap W_2$ ול $W_1 + W_2$.

(ב) (בונוס) יהא V מ"ו ויהא W תת מרחב.
הוכיחו כי כל תת מרחב אפיני מהצורה $L = v + W$ מקיים כי $L = W$ או $L \cap W = \emptyset$.