# תרגיל מספר 1

1. מציאת שורשים של מספרים מרוכבים בעזרת נוסחת דה-מואבר:

א. מצאו את כל המספרים $z\in\mathbb{C}$ כך ש- $z^6-9iz^3-8=0$.

ב מצאו את כל המספרים $z\in\mathbb{C}$ כך ש- $\left(z+\frac{1}{z}\right)^2=-1$, רשמו את הפתרון בצורה: $z=a+ib,\ a,b\in\mathbb{R}$.

ג. מצאו את כל הפתרונות של המשוואה $\left(\sqrt{3}+i\right)z^4=\left(1-i\right)z$, אפשר לכתוב אותם בצורה $re^{i\theta}$.

הדרכה: השתמשו בכך ש- $\arctan\left(-\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right)=-\frac{5}{12}\pi$.

ד. מצאו את כל האפסים של הפולינום $p\left(z\right)=z^4+4z^3+6z^2+4z+i$ ב- $\mathbb{C}$.

הדרכה: $z^4+4z^3+6z^2+4z+1=\left(z+1\right)^4$.

ה. מצאו את כל הערכים ב- $\mathbb{C}$ של $\left[\frac{\left(1+i\right)^5}{\left(1-i\right)^5}\right]^{\frac{1}{3}}$.

2. הוכחת תכונות של מספרים מרוכבים:

א. הוכיחו שאם $|z|=1$ אז הביטוי $\frac{z^2+2z+1}{z^2-2z+1}$ הוא ממשי.

הדרכה: זכרו שמספר מרוכב $w$ הוא ממשי אם ורק אם $w=\overline{w}$.

ב. נניח ש- $z$ ו- $w$ הם מספרים מרוכבים כך ש- $\operatorname{Im}\left(z+w\right)=\operatorname{Im}\left(zw\right)=0$ אז הוכיחו ש- או $z=\overline{w}$ או ש- $z$ ו- $w$ הם שניהם מספרים ממשיים.

ג. הוכיחו שאם $z\in\mathbb{C}$ ו- $|z|=1$ אז $\left|\frac{z^3-2}{1-2z^3}\right|=1$. הדרכה: זכרו ש- $|z|=1$ אם"ם $z\overline{z}=1$.

ד. הוכיחו שאם $\operatorname{Re}\left(z\right)>0$ ואם $z\neq 1$ אז $\left|\frac{z+1}{z-1}\right|>1$.