

תרגיל בית 7 פונקציות מרוכבות – טורי חזקות, טורי טיילור

שאלה 1

מצאו את תחום ההתכנסות של הטורים הבאים:

א.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+4i)^n}{(2n+1)(5n+7)}$$

ב. עבור $z \neq 2$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 4^n} \left(\frac{z+2}{z-2} \right)^n$$

ג.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-z^n}{1+z^n}$$
 אין צורך לפתור עבור נקודות בהן $|z|=1$

ד.
$$\sum_{n=1}^{\infty} n!(z^3-i)^n$$

שאלה 2

מצאו את טור טיילור של הפונקציות הבאות. כתבו את תחום ההתכנסות של כל טור.

א. סביב $z=0$ $z^2 \cos z$

ב. סביב $z = \frac{\pi}{2}$ $z^2 \cos z$

ג. סביב $z=0$ $\frac{z}{z^4+25}$

ד. סביב $z=1$ $\frac{z}{(z+2)(z+3)}$

שאלה 3

יהי $\sum a_n z^n$ טור מתכנס בתנאי. הוכיחו כי רדיוס ההתכנסות של הטור $\sum a_n z^n$ הוא 1.

שאלה 4

א. מצאו את תחום ההתכנסות של הטור

זהבית צבי ©

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n+2)z^n$$

ב. עבור הערכים בהם יש התכנסות, מצאו את סכום הטור.

שאלה 5

פתחו לטור טיילור סביב 0 את הפונקציה

$$f(z) = \int_0^z e^{w^2} dw$$

שאלה 6

מצאו את כל הפונקציות $f(z)$ המקיימות את התנאים הבאים:

$$(1) \quad f(z) \text{ שלמה}$$

$$(2) \quad \text{עבור ערכי } z \text{ כך ש-} |z| \geq 10 \quad \left| \frac{f(z)}{z^2} \right| \leq 1$$

$$(3) \quad f(0) = 0, f'(0) = 0 \text{ ו-} f''(0) = 1$$