תרגולים 10-14 - מרטינגלים - תשע"ט

21 במאי 2019

- **אינטגרביליות במ"ש (במידה שווה)**

  - יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות.
    קבוצה $\mathcal{A}$ של משתנים מקריים נקראת אינטגרבילית במידה שווה אם

    $$\forall_{\epsilon>0}\exists_{K\in[0,\infty)}\forall_{X\in\mathcal{A}}\mathbb{E}(|X|)$$

  - <u>**משפט**</u>
    יהי $\mathcal{A}$אוסף של משתנים מקריים.

    * $\forall_{p>1}\underset{x\in\mathcal{A}}{Sup}\mathbb{E}[|X|^p] < \infty \Leftarrow \mathcal{A}$אינטגרבילי במ"ש.
    * $\exists_Y\forall_{X\in\mathcal{A}}|X| \leq Y\ a.s\ \wedge\ \mathbb{E}[Y] < \infty \Leftarrow \mathcal{A}$אינטגרבילי במ"ש.

  - **תזכורת - "מרטינגל הפוך"**

    * מרטינגל $\mathbb{X}$ יקרא מרטינגל הפוך אם $\mathbb{X} = \{X_n\}_{n\leq 0}$ מכבד סינון יורד של סיגמא אלגבראות

      $$\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_n\}_{n\leq 0} = \{...\mathcal{F}_{-2} \subseteq \mathcal{F}_{-1} \subseteq \mathcal{F}_0\}$$

      ומקיים

      $$\forall_{n\leq -1}\mathbb{E}[X_{n+1}\,|\,\mathcal{F}_n] = X_n$$

      או

      $$\forall_{n\leq -1}\mathbb{E}[X_n\,|\,\mathcal{F}_{n+1}] = X_{n+1}$$

- <u>תרגיל</u>

יהי $\{X_n\}$ משתנים מקריים בלתי תלויים שווי התפלגות ואינטגרביליים. נגדיר

$$Z_{-n} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} X_k \; n \in \mathbb{N}$$

הוכח: $\{Z_{-n}\}$ מרטינגל הפוך.

<u>פתרון</u>

נגדיר סינון מתאים

$$\mathcal{F}_{-1} = \sigma(Z_{-1}, Z_{-2}....)$$

$$\mathcal{F}_{-n} = \sigma(Z_{-n}, Z_{-(n+1)}....)$$

ואז

$$\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_n\}_{n<0} = \{...\mathcal{F}_{-2} \subseteq \mathcal{F}_{-1}\}$$

ומתקיים מצד אחד,

$$\mathbb{E}[Z_{-n-1} \,|\, \mathcal{F}_{-n}] = \frac{1}{n+1} \cdot \mathbb{E}[\sum_{k=1}^{n+1} X_k \,|\, \mathcal{F}_{-n}] = \frac{1}{(n+1)} \cdot (n+1) \cdot \mathbb{E}[X_1 \,|\, \mathcal{F}_{-n}]$$

ומצד שני,

$$Z_{-n} = \mathbb{E}[Z_{-n} \,|\, \mathcal{F}_{-n}] = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \mathbb{E}[X_1 \,|\, \mathcal{F}_{-n}]$$

לכן,

$$\mathbb{E}[Z_{-n-1} \,|\, \mathcal{F}_{-n}] = Z_{-n}$$

כדרוש.

- **<u>משפט</u>** - כל מרטינגל הפוך הוא אינטגרבילי במ"ש.

- <u>תרגיל</u>

יהי Y משתנה מקרי אינטגרבילי ו- $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_{-n}\}$ סינון יורד. נגדיר $\forall_{n \in \mathbb{N}} X_{-n} = \mathbb{E}[Y \,|\, \mathcal{F}_{-n}]$

הראה כי $\{X_{-n}\}$ אינטגרבילי במ"ש ומהווה מרטינגל ביחס לסינון $\mathbb{F}$.

<u>פתרון</u>

תחילה מתכונות התוחלת המותנית, $\{X_{-n}\}$ מהווה תהליך סטוכסטי המכבד את הסינון היורד $\mathbb{F}$.

ומתקיים

$$\mathbb{E}[X_{-n} \,|\, \mathcal{F}_{-n-1}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y \,|\, \mathcal{F}_{-n}] \,|\, \mathcal{F}_{-n-1}]$$

ומכיוון ש- $\mathcal{F}_{-(n+1)} \subseteq \mathcal{F}_{-n}$ אז מתכונת תוחלת מותנית

$$\mathbb{E}[X_{-n} \,|\, \mathcal{F}_{-n-1}] = \mathbb{E}[Y \,|\, \mathcal{F}_{-n-1}] = X_{-n-1}$$

לכן, $\{X_{-n}\}$ מרטינגל הפוך מכאן, שבפרט הוא אינטגרבילי במ"ש.

- **<u>משפט</u>** (התכנסות מרטינגלית)
יהי $\{X_n\}_{n\geq 1}$ מרטינגל אינטגרבילי במידה שווה (אוסף המשתנים המקריים הוא אינטגרבילי במ"ש) אזי:

$$\lim_{n\to\infty} X_n = X \; a.s$$

- **<u>מסקנה</u>** (התכנסות מרטינגל הפוך)
יהי $(X_{-n}, \mathcal{F}_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ מרטינגל הפוך. נסמן $\mathcal{F}_{-\infty} = \bigcap_n \mathcal{F}_n$ אזי

$$X_{-n} \overset{a.s}{\to} X = \mathbb{E}[X_0 \,|\, \mathcal{F}_{-\infty}] \in L^1$$

.

- <u>מסקנה</u> - המרטינגלים ההפוכים משני התרגילים הקודמים מתכנסים.

- **<u>משפט</u>**
יהי $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ מרטינגל כך ש- $\forall_n M_n \in \mathcal{L}^2$ אזי:
$\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ חסומה ב- $\mathcal{L}^2$ ($\underset{n}{Sup}\mathbb{E}[X_n^2] < \infty$)אם ורק אם $\sum_n \mathbb{E}[(M_k - M_{k-1})^2] < \infty$ וכאשר התנאים הללו מתקיימים, אזי גם

$$M_n \to M_\infty \; a.s \;\wedge\; M_\infty \in \mathcal{L}^2$$

- **<u>משפט קולמגורוב</u>**
יהי $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ סדרה של משתנים מקריים בלתי תלויים. אזי:

$$\sum_n X_n < \infty \; a.s \iff \forall_{K>0}$$
$$1. \sum_n \mathbb{P}(|X_n| > K) < \infty$$
$$2. \sum_n \mathbb{E}[X_n^K] < \infty$$
$$3. \sum_n Var(X_n^K) < \infty$$

כאשר:

$$X_n^K(\omega) = \begin{cases} X_n(\omega) & |X_n(\omega)| \leq K \\ 0 & |X_n(\omega)| > K \end{cases}$$