שלוש דוגמאות בתורת החבורות

25 באוגוסט 2013

תקציר

קובץ תרגילים זה מכיל שלוש דוגמאות לזוג חבורות לא איזומורפיות המשוכנות אחת בתוך השנייה. נכתב עבור קורס 88-211, אלגברה מופשטת I, באוניברסיטת בר־אילן, סמסטר קיץ תשע"ג.

כל אחד מן הסעיפים הוא דוגמה לזוג חבורות G, H המקיימות את התנאים הבאים:

1. קיים שיכון $\varphi : G \hookrightarrow H$.
2. קיים שיכון $\psi : H \hookrightarrow G$.
3. החבורות לא איזומורפיות $G \ncong H$. (שימו לב כי בהכרח החבורות אינן סופיות.)

1 חבורות חופשיות

נבחר $G = F(a,b)$, החבורה החופשית עם שני יוצרים ואת $H = F(a,b,c)$, החבורה החופשית עם שלושה יוצרים.

תרגיל 1.1. הראו כי קיים שיכון $\varphi : G \hookrightarrow H$. (רמז: שיכון טבעי.)

תרגיל 1.2. הראו כי קיים שיכון $\psi : H \hookrightarrow G$. (רמז: הסתכלו על תת־החבורה של G הנוצרת על ידי שלושה איברים $\left\langle aba^{-1}, a^2ba^{-2}, a^3ba^{-3} \right\rangle$ שאיזומורפית ל-H. באופן דומה אפשר לשכן כל חבורה חופשית מדרגה בת־מנייה בחבורה החופשית עם שני יוצרים.)

תרגיל 1.3. הראו שהחבורות לא איזומורפיות. (רמז: לחבורה G יש קבוצת יוצרים מינימלית מעוצמה 2.)

2 מכפלות ישרות של חבורות ציקליות

נבחר את החבורות

$$G = \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_{p^i} = \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_{p^2} \times \dots$$
$$H = \prod_{i=2}^{\infty} \mathbb{Z}_{p^i} = \mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_{p^3} \times \dots$$

תרגיל 2.1. הראו כי קיים שיכון $\varphi : G \hookrightarrow H$. (רמז: תמיד קיים שיכון $\mathbb{Z}_{5^i} \hookrightarrow \mathbb{Z}_{5^{i+1}}$)

תרגיל 2.2. הראו כי קיים שיכון $\psi : H \hookrightarrow G$. (רמז: שיכון טבעי.)

תרגיל 2.3. הראו שהחבורות לא איזומורפיות. (רמז: הראו שלכל איבר מסדר p בחבורה H קיים שורש מאינדקס p. כלומר לכל $h \in H$ מסדר p קיים $k \in H$ כך שמתקיים $k^p = h$. מצאו איבר בחבורה G מסדר p שאין לו שורש מאינדקס p.)

3 איחוד חבורות סימטריה ואיחוד חבורות חילופין

נבחר $G = \bigcup_{n\geq 5} S_n$ איחוד כל חבורות הסימטריה S_n עבור $n \geq 5$, ונבחר $H = \bigcup_{n\geq 5} A_n$ איחוד כל חבורות החילופין A_n עבור $n \geq 5$.

תרגיל 3.1. הראו כי לכל $n \in \mathbb{N}$ קיימים שיכונים $A_n \hookrightarrow S_n \hookrightarrow A_{n+2}$. (רמז: השיכון הראשון הוא ברור לפי הכלה. לשיכון השני הגדירו העתקה $\phi_n : S_n \to A_{n+2}$ לפי $\phi_n(\sigma)(i) = \sigma(i-2)$ אם $3 \leq i \leq n+2$, ואם $\operatorname{sign}(\sigma) = 1$ אז $\phi_n(\sigma)(1) = 1$ ו-$\phi_n(\sigma)(2) = 2$ ואם $\operatorname{sign}(\sigma) = -1$ אז $\phi_n(\sigma)(1) = 2$ ו-$\phi_n(\sigma)(2) = 1$. הראו מהבנייה כי תמונת ϕ_n מוכלת ב-A_{n+2} ושהיא הומומורופיזם מוגדר היטב.)

הערה 3.2. אנו יכולים לראות את S_n כתת־חבורה של S_{n+1} לפי השיכון הסטנדרטי, השולח תמורה σ של n איברים לתמורה $\hat{\sigma}$ של $n+1$ איברים לפי $\hat{\sigma}(i) = \sigma(i)$ לכל $1 \leq i \leq n$ ומקבע את האיבר האחרון $\hat{\sigma}(n+1) = n+1$. להמשך התרגיל נשתמש בנקודת מבט זו כשנדון בחבורות G ו-H.

תרגיל 3.3. לא כל שיכון $S_n \hookrightarrow S_{n+1}$ הוא השיכון הסטנדרטי. נסו למצוא שיכון לא סטנדרטי $S_5 \hookrightarrow S_6$ לפי ההדרכה הבאה:

1. מצאו תת־חבורה $K \leq S_5$ מסדר 20.
2. חשבו $\frac{120}{20}$. מותר להעזר במחשבון.
3. הסיקו כי S_5 פועלת טרנזיטיבית על מרחב המחלקות השמאליות S_5/H, שעוצמתו 6. הראו כי הומומורפיזם $\phi : S_5 \hookrightarrow S_6$ שהגרעין שלו מוכל בחיתוך $\bigcap_{g\in S_5} gKg^{-1}$ הוא נורמלי. מהכרת תת־החבורות של S_5 הסיקו כי הגרעין טריוויאלי ולכן $g = 1$ ומכאן שהומומורפיזם הוא מונומורפיזם (כלומר שיכון). מפני שהפעולה על מחלקות שמאליות היא טרנזיטיבית, אזי השיכון הוא לא סטנדרטי.

תרגיל 3.4. הראו כי קיים שיכון $\varphi : G \hookrightarrow H$. יש להראות כי השיכונים בתרגיל 3.1 תואמים, כלומר $\phi_{n+1}(\sigma) = \phi_n(\sigma)$ לכל $\sigma \in S_n$.

תרגיל 3.5. הראו כי קיים שיכון $\psi : H \hookrightarrow G$.

למה 3.6. כל איחוד שרשרת של חבורות פשוטות הוא חבורה פשוטה.

הוכחה. זהו תרגיל טוב שניתן בעבר כשאלת אתגר. $\square$

עובדה 3.7. לכל $n \geq 5$ החבורה A_n היא פשוטה. (משפט מן ההרצאה.)

מסקנה 3.8. החבורה $H = \bigcup_{n\geq 5} A_n$ היא פשוטה. (הוכחה מיידית מ-3.6 ומ-3.7.)

תרגיל 3.9. הראו שהחבורה G אינה פשוטה, ובפרט לא איזומורפית לחבורה H. (רמז: שימו לב כי $A_n \subset S_n$. הוכיחו כי $H \lhd G$ תת־חבורה נורמלית לא טריוויאלית. הדרכה: תהא $\pi \in H$, אזי $\pi \in A_m$ עבור m כלשהו. יהא $g \in G$, אזי $g \in S_k$ עבור k כלשהו. בחרו מספר טבעי $l \geq m, k$, והראו $\operatorname{sign}(g\pi g^{-1}) = 1$ ולכן $g\pi g^{-1} \in A_l \subset H$.)