פתרון תרגיל 1 - טופולוגיה

<u>שאלה 1</u>

א. יהי $y \in f\left(f^{-1}(A)\right)$, אזי קיים $x \in f^{-1}(A)$ כך ש- $f(x)=y$ וכן $x \in f^{-1}(A) \Leftarrow f(x) \in A$, ונקבל בסה"כ $y \in A$.

ב. כבר יש לנו הכלה בכיוון אחד, נוכיח את ההכלה בכיוון השני: $f\left(f^{-1}(A)\right) \supseteq A$. יהי $y \in A$. מכיוון ש f "על" נקבל שקיים $x \in f^{-1}(A)$ כך ש- $f(x)=y$. מכאן $y \in f\left(f^{-1}(A)\right)$.

<u>דוגמה נגדית</u> במקרה בו f לא "על". נניח $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)=0$ אזי $f\left(f^{-1}(\mathbb{R})\right)=\{0\} \neq \mathbb{R}$.

ג. יהי $x \in B$, אזי $f(x) \in f(B)$ ולכן $x \in f^{-1}\left(f(B)\right)$.

ד. כבר יש לנו הכלה בכיוון אחד, נוכיח את ההכלה בכיוון השני: $f^{-1}\left(f(B)\right) \subseteq B$. יהי $x \in f^{-1}\left(f(B)\right)$, אזי $f(x) \in f(B)$. נראה שבהכרח $x \in B$. אחרת, קיים $x \neq x_1 \in B$ כך ש- $f(x)=f(x_1)$. אך זו סתירה לכך ש- f חח"ע. מכאן $x \in B$.

<u>דוגמה נגדית</u> במקרה בו f לא חח"ע. אותה דוגמה כמו בסעיף ב' רק שהפעם נקח $B=\{5\}$ ומתקיים $f^{-1}\left(f(B)\right)=f^{-1}\left(f(\{5\})\right)=f^{-1}\left(\{0\}\right)=\mathbb{R} \neq \{5\}$.

<u>שאלה 2</u>

א. יש להראות שמתקיים $f^{-1}\left[A^C\right]=\left(f^{-1}[A]\right)^C$

נראה הכלה דו כיוונית:

$\subseteq$: יהי $x \in f^{-1}\left[A^C\right]$ אזי

$$f(x) \in A^C \to f(x) \notin A \to x \notin f^{-1}[A] \to x \in \left(f^{-1}[A]\right)^C$$

$\supseteq$: יהי $x\in\left(f^{-1}[A]\right)^C$ אזי

$$x\notin f^{-1}[A]\to f(x)\notin A\to f(x)\in A^C\to x\in f^{-1}\left[A^C\right]$$

ב. תנאי הכרחי ומספיק הוא ש - f חח"ע ועל.

<u>מספיק</u>: נראה ש $f\left(A^C\right)=\left(f(A)\right)^C$.

$\subseteq$: יהי $y\in f\left(A^C\right)$ אזי קיים $x\in A^C$ כך ש $f(x)=y$. נראה שבהכרח $y\in\left(f(A)\right)^C$. אחרת, $y\in f(A)$. לכן קיים $x_1\in A$ כך ש $f(x_1)=y$ ומכאן $f(x)=f(x_1)$ ובשל חח"ע $x=x_1$. אך זה לא יתכן כי $x\in A^C$ ו- $x_1\in A$.

$\supseteq$: יהי $y\in\left(f(A)\right)^C$ אזי $y\notin f(A)$ מכיוון ש f 'על' בהכרח קיים $x\in X$ כך ש- $f(x)=y$. מכיוון ש $y\notin f(A)$ נקבל כי $y\in f\left(A^C\right)$.

<u>הכרחי</u>: אם f אינה 'על' אזי $f\left(\varnothing^C\right)=f(X)\neq Y=\left(f(\varnothing)\right)^C$. אם f אינה חח"ע אזי קיימים $x_1\neq x_2$ כך ש $f(x_1)=f(x_2)$ אבל אז נקבל

$$\begin{cases} f(x_2)\in f\left(\{x_1\}^C\right) \\ f(x_2)\notin\left(f(\{x_1\})\right)^C \end{cases}$$ ומכאן $f\left(\{x_1\}^C\right)\neq\left(f(\{x_1\})\right)^C$.

ג. נוכיח ש $f(A)\setminus f(B)\subseteq f(A\setminus B)$ לכל $A,B\subseteq X$. יהי $y\in f(A)\setminus f(B)$ אזי קיים $x\in A$ כך ש $f(x)=y$ וכן $y\notin f(B)$. מכאן $x\in A\setminus B$ ולכן $y\in f(A\setminus B)$.

ד. מ"ל (עפ"י ג') ש- $f(A)\setminus f(B)\supseteq f(A\setminus B)$ לכל $A,B\subseteq X$ $\Leftrightarrow$ f חח"ע.

$(\Rightarrow)$: נניח $A,B\subseteq X$. מכיוון ש - $A\setminus B\subseteq A$ נקבל $f(A\setminus B)\subseteq f(A)$.
נראה שאם $y\in f(A\setminus B)$ אזי $y\notin f(B)$. אחרת $y\in f(A\setminus B)\cap f(B)$ ומכאן קיימים $x_1\in A\setminus B, x_2\in B$ כך ש $f(x_1)=f(x_2)=y$ ובשל החח"ע של f נקבל $x_1=x_2$. וזו כמובן סתירה לכך ש- $x_1\notin B, x_2\in B$. מכאן $f(A\setminus B)\subseteq\left(f(B)\right)^C$ ובסה"כ

$$f(A\setminus B)\subseteq f(A)\cap\left(f(B)\right)^C=f(A)\setminus f(B)\ .$$

$(\Leftarrow)$: אם f לא חח"ע אזי קיימים $x_1\neq x_2\in X$ כך ש $f(x_1)=f(x_2)$ אבל אז $f(x_2)\in f\left(\{x_2\}\setminus\{x_1\}\right)\not\subset f\left(\{x_2\}\right)\setminus f\left(\{x_1\}\right)=\varnothing$ בסתירה לנתון

(עבור $A=\{x_2\}, B=\{x_1\}\subseteq X$).

שאלה 3

א. הוכחה באינדוקציה- הטענה טריויאלית עבור בסיס האינדוקציה $n=2$.
נניח נכונות עבור $n \geq 2$ נקבל מאי שוויון המשולש ומהנחת האינדוקציה ש:

$$d(x_1,x_{n+1}) \leq d(x_1,x_n)+d(x_n,x_{n+1}) \leq d(x_1,x_2)+d(x_2,x_3)+\cdots+d(x_{n-1},x_n)+d(x_n,x_{n+1})$$

ולכן הטענה נכונה עבור $n+1$.

ב. שקול להוכיח $-d(x,y) \leq d(x,z)-d(y,z) \leq d(x,y)$.
מאי שוויון המשולש נקבל $d(x,z)-d(y,z) \leq d(x,y)$ באופן דומה (תוך שימוש בתכונת הסימטריות בנוסף) נקבל:
$d(y,z) \leq d(y,x)+d(x,z)=d(x,y)+d(x,z)$ ולכן גם
$-d(x,y) \leq d(x,z)-d(y,z)$.

שאלה 4

כל התכונות פרט לאי שוויון המשולש טריוויאליות. נראה ש-
$d(x,z) \leq \max\{d(x,y),d(y,z)\}$ ותכונה זו גוררת כמובן את אי שוויון המשולש.

אם $x=z$ אז מתקיים $d(x,z)=0$ והטענה ברורה. אם $x=y$ אז $d(x,z)=d(y,z)$ ושוב הטענה ברורה. אם $y=z$ שוב ניתן להראות בצורה דומה שהטענה נכונה.

נניח אם כן ש $x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z$.

נניח בשלילה ש $d(x,z) > \max\{d(x,y),d(y,z)\}$. אזי $d(x,y) < d(x,z)$ וגם $d(y,z) < d(x,z)$. נסמן
$j_1=\min\{j\in\mathbb{N}: x_j \neq z_j\}, j_2=\min\{j\in\mathbb{N}: x_j \neq y_j\}, j_3=\min\{j\in\mathbb{N}: y_j \neq z_j\}$. מאי השוויון $d(x,y)<d(x,z)$ נקבל ש $\frac{1}{\min\{j\in\mathbb{N}: x_j \neq y_j\}} > \frac{1}{\min\{j\in\mathbb{N}: x_j \neq z_j\}}$ ומכאן $j_1<j_2$. כעת, $j_2=\min\{j\in\mathbb{N}: x_j \neq y_j\}$ ולכן $x_{j_1}=y_{j_1}$. באופן דומה מראים מאי השוויון השני ש $j_1<j_3$ ומכיון ש $j_3=\min\{j\in\mathbb{N}: y_j \neq z_j\}$ מסיקים ש $y_{j_1}=z_{j_1}$. אבל אז נקבל בסה"כ ש $x_{j_1}=z_{j_1}$ בסתירה לכך ש $j_1=\min\{j\in\mathbb{N}: x_j \neq z_j\}$.

<u>שאלה 5</u>

סימטריות: מ"ל שלכל $x,y\in X$ מתקיים $d(y,x)\le d(x,y)$ (למה?).

כדי להוכיח זאת נציב $z=x$ בתנאי השני ונקבל $d(y,x)\le d(x,y)+d(x,x)$. מהתנאי הראשון $d(x,x)=0$ ומכאן $d(y,x)\le d(x,y)$ כדרוש.

ניתן להיעזר כעת בסימטריות ובתנאי השני כשמחליפים את התפקידים של y ו- z (מותר לעשות זאת כי התנאי השני מתקיים לכל $x,y,z\in X$) כדי לקבל את אי שוויון המשולש בנוסח $d(x,z)\le d(x,y)+d(y,z)$.

אי שליליות: נראה שלכל $x,z\in X$ מתקיים $0\le d(z,x)$. ניתן להציב בתנאי השני $y=x$. נקבל כעת $d(x,x)\le d(z,x)+d(z,x)=2d(z,x)$. מהתנאי הראשון $d(x,x)=0$ ולכן $0\le 2d(z,x)$. מכאן $0\le d(z,x)$ כדרוש.

<u>שאלה 6</u>

1. לא מטריקה. למשל מתקיים $(1,3)\ne(1,4)$ אבל $d\left((1,3),(1,4)\right)=0$.
2. לא מטריקה. למשל מתקיים $(1,3)\ne(1,4)$ אבל $d\left((1,1),(1,1)\right)=4\ne 0$.
3. זוהי אכן מטריקה. מאי שליליות של המטריקה d נקבל את אי שליליות של D ובנוסף:

$$D\left((x,y),(x',y')\right)=0\Leftrightarrow d(x,x')+d(y,y')=0\Leftrightarrow d(x,x')=0\wedge d(y,y')=0.$$

מכיון ש d מטריקה נקבל ש

$$d(x,x')=0\wedge d(y,y')=0\Leftrightarrow x=x'\wedge y=y'\Leftrightarrow (x,x')=(y,y').$$

בסה"כ $D\left((x,y),(x',y')\right)=0\Leftrightarrow (x,x')=(y,y')$. הסימטריות של D נובעת בצורה ברורה מהסימטריות של d.

אי שוויון המשולש: $D\left((x,y),(x'',y'')\right)=d(x,x'')+d(y,y'')$. מאי שוויון המשולש של d נקבל: $d(x,x'')\le d(x,x')+d(x',x'')$ וכן $d(y,y'')\le d(y,y')+d(y',y'')$. לכן,

$$D\big((x,y),(x'',y'')\big)=d(x,x'')+d(y,y'')\le d(x,x')+d(x',x'')+d(y,y')+d(y',y'')=$$
$$=\big(d(x,x')+d(y,y')\big)+\big(d(x',x'')+d(y',y'')\big)\le D\big((x,y),(x',y')\big)+D\big((x',y'),(x'',y'')\big)$$