פתרון 3

שאלה 1

חשבו את החסם העליון והתחתון, מינימום ומקסימום (אם יש) של הקבוצה הבאה:
$A=\left\{\frac{1}{n}+\frac{1}{m^2}:m,n\in\mathbb{N}\right\}$.

פתרון

נראה שהמקסימום הוא 2. מתקיים לכל $m\geq 1$ $\frac{1}{m}\leq 1$ ושוויון מתקבל כאשר $m=1$.

כמו כן לכל $n\geq 1$ $\frac{1}{n^2}\leq 1$ ושוויון מתקבל כאשר $n=1$. מכאן קל להסיק ש $2\geq\frac{1}{m}+\frac{1}{n^2}$ לכל $m,n\in\mathbb{N}$ ו-$2\in A$ ולכן המקסימום הוא 2.

נראה ש-0 הוא חסם תחתון. $\frac{1}{m}+\frac{1}{n^2}>0$ לכל $m,n\in\mathbb{N}$ ולכן אפס חסם מלרע שלא שייך לקבוצה. נוכיח שהוא החסם התחתון וכך גם נסיק שלקבוצה אין מינימום.

יהי $\varepsilon>0$ נראה ש-$\varepsilon+0=\varepsilon$ אינו חסם מלרע ונסיק שאפס חסם תחתון (כי הוא חסם מלרע הגדול ביותר). צריך להראות שקיימים $m_0,n_0\in\mathbb{N}$ כך ש $\frac{1}{m_0}+\frac{1}{n_0^2}<\varepsilon$. קבוצת הטבעיים אינה חסומה מלעיל ובפרט $\frac{2}{\varepsilon}$ אינו חסם מלעיל של הטבעיים ולכן קיים $m_0\in\mathbb{N}$ כך ש $m_0>\frac{2}{\varepsilon}$. ניקח $n_0=m_0$ ונקבל $n_0^2\geq n_0=m_0>\frac{2}{\varepsilon}$. לכן $\varepsilon=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}>\frac{1}{m_0}+\frac{1}{n_0^2}$.

שאלה 2

יהיו קבוצות לא ריקות $A,B\subseteq\mathbb{R}$, נניח שמתקיים $\forall a\in A,\forall b\in B:a\leq b$ (כל איבר ב A קטן שווה מכל איבר ב B).

א.הוכיחו: $\sup A\leq\inf B$

ב. נניח שמתקיים שוויון בסעיף א', כלומר, $\sup A=\inf B$. הוכיחו/הפריכו: $A\cap B\neq\phi$.
ג. אם הוכחתם בסעיף ב', מה הוא האיבר המשותף ל A ו B? אם הפרכתם, מתי כן יהיה לשתי הקבוצות איבר משותף?

<u>פתרון</u>

א. נניח בשלילה ש- $\sup A>\inf B$. ניקח $\varepsilon=\frac{\sup A-\inf B}{2}>0$ אזי
$\sup A-\varepsilon=\frac{\sup A+\inf B}{2}$ שזה אמצע הקטע $[\inf B,\sup A]$. אבל לפי משפט קיים $a\in A$ כך ש- $a>\sup A-\varepsilon$.

$\sup A-\varepsilon=\frac{\sup A+\inf B}{2}=\inf B+\varepsilon$ אבל לפי משפט קיים $b\in B$ כך ש-
$b<\inf B+\varepsilon=\sup A-\varepsilon<a$. ובסיכום מצאנו $b<a$ בסתירה לנתון.

<u>דרך נוספת</u>
נניח בשלילה ש $\sup A>\inf B$. $\sup A$ הוא החסם העליון של A ובפרט חסם מלעיל **מינימלי** של A. מכיון ש $\sup A>\inf B$ נסיק ש- $\inf B$ **אינו** חסם מלעיל של A.
כלומר, קיים $a_0\in A$ כך ש $a_0>\inf B$. $\inf B$ הוא החסם התחתון של B בפרט חסם מלרע **מקסימלי** של B. מכיון ש $a_0>\inf B$ נסיק ש a_0 **אינו** חסם מלרע של B.
כלומר, קיים $b_0\in B$ כך ש $a_0>b_0$. זה כמובן סותר את הנתון: $\forall a\in A,\forall b\in B: a\leq b$.
מכאן בהכרח $\sup A\leq\inf B$.

ב. הפרכה: ניקח $A=(0,1)$ ו- $B=(1,2)$. $\sup A=\inf B=1$ אבל $A\cap B=\phi$

ג. האיבר המשותף יתקיים כאשר ל A יהיה מקסימום, ול B יהיה מינימום. ואז $\sup A\in A$ ו- $\inf B\in B$.

<u>שאלה 3</u>

יהיו $A,B\subseteq\mathbb{R}$. הוכיחו:

א. אם A,B לא ריקות וחסומות מלעיל אזי גם $A\bigcup B$ לא ריקה וחסומה מלעיל, ומתקיים $\sup\left(A\bigcup B\right)=\max\left\{\sup A,\sup B\right\}$.
ב. אם A,B לא ריקות וחסומות מלעיל אזי $A\bigcap B$ חסומה מלעיל, ואם היא לא ריקה אזי מתקיים $\sup\left(A\bigcap B\right)\leq\min\left\{\sup A,\sup B\right\}$.
ג. לגבי סעיף ב', מצאו דוגמא בה השוויון לא מתקיים (כלומר מתקיים $\sup\left(A\bigcap B\right)<\min\left\{\sup A,\sup B\right\}$).

חשבון אינפיניטסימלי 1
מרצה: פרופסור אגרנובסקי
מתרגלים: לואי פולב ומני שלוסברג

<u>פתרון</u>

א. ברור שאם A,B לא ריקות אז גם האיחוד אינו ריק. עפ"י הנתון A,B חסומות מלעיל ולכן $\sup(A),\sup(B)\in\mathbb{R}$ נראה ש $\sup(A\cup B)=\max\{\sup(A),\sup(B)\}$. נוכיח תחילה ש $\max\{\sup(A),\sup(B)\}$ הוא חסם מלעיל של $A\cup B$ ומכאן כמובן נסיק ש $A\cup B$ חסומה מלעיל וש $\sup(A\cup B)\le\max\{\sup(A),\sup(B)\}$.

$\forall a\in A \quad \max\{\sup(A),\sup(B)\}\ge\sup(A)\ge a$. באופן דומה
$\forall b\in B \quad \max\{\sup(A),\sup(B)\}\ge\sup(B)\ge b$.

נקבל ש- $\forall c\in A\cup B \quad \max\{\sup(A),\sup(B)\}\ge c$ ולכן $A\cup B$ חסומה מלעיל וגם $\sup(A\cup B)\le\max\{\sup(A),\sup(B)\}$. (כי $\sup(A\cup B)$ הוא החסם מלעיל הקטן ביותר של $A\cup B$). נוכיח כעת אי שוויון בכיוון ההפוך, כלומר ש-
$\sup(A\cup B)\ge\max\{\sup(A),\sup(B)\}$ ונקבל בסה"כ את השוויון הדרוש.

שקול להוכיח ש $\sup(A\cup B)\ge\sup(A)\wedge\sup(A\cup B)\ge\sup(B)$. $\sup(A\cup B)$ חסם מלעיל של $A\cup B$ ולכן $\forall c\in A\cup B \quad \sup(A\cup B)\ge c$. בפרט, לכל $a\in A$ נקבל ש $\forall a\in A \quad \sup(A\cup B)\ge a$ ומכאן $\sup(A\cup B)\ge\sup(A)$. באופן דומה מוכיחים $\sup(A\cup B)\ge\sup(B)$ ומסיימים את ההוכחה.

ב. עפ"י הנתון A,B לא ריקות וחסומות מלעיל ולכן קיימים המספרים הממשיים $\sup(A),\sup(B)$. מתקיים $\forall a\in A \quad \sup(A)\ge a$ ובפרט, $\forall a\in A\cap B \quad \sup(A)\ge a$.

(שימו לב שהנ"ל מתקיים באופן ריק אם $A\cap B=\varnothing$). באופן דומה
$\forall a\in A\cap B \quad \sup(B)\ge a$. מכאן נובע ש $\forall a\in A\cap B \quad \min\{\sup(A),\sup(B)\}\ge a$ ולכן $\min\{\sup(A),\sup(B)\}$ חסם מלעיל של $A\cap B$. לכן אם $A\cap B\ne\varnothing$ $\sup(A\cap B)\in\mathbb{R}$ ומתקיים $\sup(A\cap B)\le\min\{\sup(A),\sup(B)\}$.

ג. קחו $A=\{1,2\},\ B=\{1,3\}$.

שאלה 4

הוכיחו ישירות על פי ההגדרה:

א. $\lim_{n\to\infty}\frac{2n+\left(-1\right)^n}{3n}=\frac{2}{3}$

ב. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\cos\left(n^2\right)=0$

ג. $\lim_{n\to\infty}\frac{3}{4+\sqrt{n}}=0$

פתרון

א. יהי $\varepsilon>0$. אזי קיים $n_0>\frac{1}{3\varepsilon}$ (כי קבוצת הטבעיים לא חסומה מלעיל). לכן לכל $n\ge n_0$ מתקיים $n>\frac{1}{3\varepsilon}$ או באופן שקול $\varepsilon>\frac{1}{3n}$. לכן לכל $n\ge n_0$ מתקיים $\left|\frac{2n+(-1)^n}{3n}-\frac{2}{3}\right|=\left|\frac{2n+(-1)^n-2n}{3n}\right|=\frac{1}{3n}<\varepsilon$ וקיבלנו הדרוש.

ב. יהי $\varepsilon>0$. אזי קיים $n_0>\frac{1}{2\varepsilon}$. לכל $n\ge n_0$ מתקיים $n>\frac{1}{2\varepsilon}$ או באופן שקול $\varepsilon>\frac{1}{2n}$. מכיון ש $|\cos(x)|\le 1$ לכל $x\in\mathbb{R}$, נקבל שלכל $n\ge n_0$ מתקיים $\left|\frac{1}{2n}\cos(n^2)-0\right|=\frac{1}{2n}\left|\cos(n^2)\right|\le\frac{1}{2n}\cdot 1<\varepsilon$ וקיבלנו הדרוש.

ג. יהי $\varepsilon>0$. אזי קיים $n_0>\frac{9}{\varepsilon^2}$. לכל $n\ge n_0$ מתקיים $n>\frac{9}{\varepsilon^2}$ או באופן שקול $\varepsilon>\frac{3}{\sqrt{n}}$. נקבל שלכל $n\ge n_0$ מתקיים $\left|\frac{3}{4+\sqrt{n}}-0\right|=\frac{3}{4+\sqrt{n}}<\frac{3}{\sqrt{n}}<\varepsilon$ וקיבלנו הדרוש.

שאלה 5

הוכיחו על פי השלילה של הגדרת הגבול:

א. $\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n+3}\ne 1$

ב. לכל $L\in\mathbb{R}$ הסדרה $\left(-1\right)^n$ אינה מתכנסת ל- L.

ג. לכל $L\in\mathbb{R}$ הסדרה $(-1)^n n$ אינה מתכנסת ל- L.

פתרון

א. יהי $\varepsilon=\frac{1}{2}$. אזי לכל n אם ניקח $n_0=n$ נקבל ש

$$\left|\frac{n_0+1}{2n_0+3}-1\right|=\left|\frac{n+1}{2n+3}-1\right|=\left|\frac{n+1-(2n+3)}{2n+3}\right|=\left|\frac{-n-2}{2n+3}\right|=\frac{n+2}{2n+3}\geq\frac{n+2}{2n+4}=\frac{1}{2}=\varepsilon$$

ב. נוכיח תחילה לכל $L\neq-1$. נבחר $\varepsilon=|1+L|>0$. לכל $n\in\mathbb{N}$ קיים $n_0\geq n$ אי זוגי. מתקיים: $\left|(-1)^{n_0}-L\right|=|-1-L|=|1+L|\geq\varepsilon$. כעת נראה שגם $L=-1$ אינו הגבול. ניקח $\varepsilon=2>0$. לכל $n\in\mathbb{N}$ קיים $n_0\geq n$ זוגי ומתקיים:

$\left|(-1)^{n_0}-(-1)\right|=|1+1|=2\geq\varepsilon$.

<u>הערה:</u> היה אפשר לפרק גם למקרים $L>0, L=0, L<0$, אך הפעם זה רק מאריך את הפתרון.

ג. יהי $\varepsilon=1$. לכל $n\in\mathbb{N}$ יהי $n_0>\max\{n,|L|+1\}$ זוגי (קבוצת הטבעיים לא חסומה מלעיל ולכן יש n_0 כזה וברור שיש זוגי כזה) כעת $n_0>n$ ומתקיים:

$n_0>|L|+1\geq L+1$ ולכן $n_0-L>1$. נקבל ש $\left|(-1)^{n_0}n_0-L\right|=|n_0-L|>1=\varepsilon$.

<u>שאלה 6</u>

תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה ויהי $L\in\mathbb{R}$. אילו מהתנאים הבאים שקולים לכך שהסדרה מתכנסת ל- L? הוכיחו שקילות (גרירה כפולה) או הפריכו (באמצעות דוגמא נגדית).

א. לכל $\varepsilon>0$ קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כך שאם $n>n_0$ אז $|a_n-L|<\varepsilon$ (שימו לב: ההבדל בין תנאי זה לבין הגדרת הגבול כפי שהגדרנו בכיתה הוא שכאן אנו דורשים $n>n_0$ במקום $n\geq n_0$).

ב. קיים $M\in\mathbb{R}$ כך שלכל $\varepsilon>0$ קיים n_0 עבורו לכל $n\geq n_0$ מתקיים $|a_n-L|<M\cdot\varepsilon$.

ג. לכל $\varepsilon>0$ קיים $M\in\mathbb{R}$ וקיים n_0 כך שלכל $n\geq n_0$ מתקיים $|a_n-L|<M\cdot\varepsilon$.

ד. קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כך שלכל $\varepsilon>0$ ולכל $n\geq n_0$ מתקיים $|a_n-L|<\varepsilon$.

פתרון

א. הוכחה- הגדרת הגבול גוררת את תנאי (א) באופן מיידי שכן אם $n>n_0$ אז בפרט $n \ge n_0$. בכיוון ההפוך נניח שתנאי (א) מתקיים. יהי $\varepsilon>0$ (בשביל הוכחת הגדרת הגבול) עלינו למצוא $n_1 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \ge n_1$ מתקיים $|a_n - L| < \varepsilon$. מהנתון קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > n_0$ מתקיים $|a_n - L| < \varepsilon$. יהי $n_1 = n_0 + 1$. ראשית $n_1 \in \mathbb{N}$. שנית לכל $n \ge n_1 = n_0 + 1$ מתקיים ש $n > n_0$ ולכן $|a_n - L| < \varepsilon$ כנדרש.

ב. הוכחה- הגדרת הגבול גוררת את תנאי (ב) באופן מיידי שכן עבור $M=1$ נקבל בדיוק את הגדרת הגבול. בכיוון השני יהי $\varepsilon>0$ (בשביל הוכחת הגדרת הגבול) עלינו למצוא $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \ge n_0$ מתקיים $|a_n - L| < \varepsilon$. מהנתון קיים $M \in \mathbb{R}$ כך שלכל $\varepsilon'>0$ קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \ge n_0$ מתקיים $|a_n - L| < M\varepsilon'$. נשים לב שבהכרח $M>0$ (מדוע?). כמו כן התנאי מתקיים לכל $\varepsilon'>0$ ובפרט עבור $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{M} > 0$. נקבל שלכל $n \ge n_0$ (n_0 הוא הטבעי שתלוי ב $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{M}$) מתקיים $|a_n - L| < M\varepsilon' = M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$ וקיבלנו הדרוש.

ג. הפרכה- תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ הסדרה הקבועה אפס. נראה ש- $L=\frac{1}{2}$ מקיים את תנאי (ג). ודאי שהוא אינו מקיים את הגדרת הגבול כי הסדרה מתכנסת לאפס ולא ל $\frac{1}{2}$ (הגבול הוא יחיד). יהי $\varepsilon>0$ (לצורך הוכחת תנאי (ג)) מכיון שקבוצת הטבעיים לא חסומה מלעיל אזי קיים $M \in \mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ המקיים $M \ge \frac{1}{2\varepsilon}$ ומכאן שקול $\left|a_n - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} < M\varepsilon$ וזאת לכל n ולכן בפרט עבור $n_0 = 1$ למשל נקבל שלכל $n \ge n_0$ מתקיים $|a_n - L| < M\varepsilon$.

הערה: הפרכנו את שקילות ההגדרות אך ניתן להוכיח שהגדרת הגבול דווקא כן גוררת את סעיף (ג).

(למעשה סעיף (ב) גורר את סעיף (ג) אך הגרירה בכיוון ההפוך אינה נכונה כפי שהראינו).

ד. הפרכה- הסדרה $\frac{1}{n}$ מתכנסת ל $L=0$ לפי הגדרת הגבול. נראה שתנאי (ד) לא מתקיים. כלומר נראה שמתקיימת השלילה של (ד) במצב זה. עלינו להראות שלכל $n\in\mathbb{N}$ קיים $\varepsilon_0>0$ וקיים $n_0\geq n$ כך ש $\left|a_{n_0}-L\right|\geq\varepsilon$. יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\varepsilon_0=\frac{1}{n}>0$. נבחר $n_0=n$ מן התם מתקיים $n_0\geq n$. כעת $\left|a_{n_0}-L\right|=\frac{1}{n_0}=\frac{1}{n}\geq\varepsilon$.

הערה: הפרכנו את שקילות ההגדרות אך ניתן להוכיח שההגדרה בסעיף (ד) גוררת את הגדרת הגבול. אנחנו הראינו שהגרירה בכיוון ההפוך אינה נכונה.