פתרון תרגיל 3

שאלה1

א. מכיון שבין כל שני מספרים ממשיים נמצא מס' רציונלי נקבל שקבוצת נק' הצטברות של $\mathbb{Q}$ היא כל $\mathbb{R}$. שכן לכל $r \in \mathbb{R}$ ולכל $\varepsilon > 0$ קיים מספר רציונלי גדול מ r וקטן מ $r+\varepsilon$.

ב. נראה שאוסף נקודות ההצטברות של $(0,1)$ הוא הקבוצה $[0,1]$. אמנם,לכל $a \in (0,1)$ הסדרה $\left\{a + \frac{1-a}{2n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ מוכלת ב $(0,1) \setminus \{a\}$ ומתכנסת ל a. מהתבוננות בגבול הסדרות $\left\{1 - \frac{1}{2n}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\left\{\frac{1}{2n}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$ ניתן להסיק שגם הנקודות $0,1$ הינן נקודות הצטברות של $(0,1)$.

לבסוף, לכל $r \in \mathbb{R}$ כך ש $1 < r$ או $r < 0$, r **לא** נקודת הצטברות של $(0,1)$. שכן לא ניתן לבנות סדרה ב $(0,1)$ שתתכנס ל r כזה. (ידוע מאינפי' שאם $0 < x_n < 1$ ו $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ אזי $0 \le a \le 1$).

שאלה 2

א. $A' = \{0\}$: ברור ש $0 \in A'$ שכן $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ ואיברי הסדרה שונים מ 0. נוכיח שאין נקודות הצטברות נוספות ל A. נניח $x_n \subseteq A$ וכן $x_n \to x$. ניתן לסדר את איברי x_n בסדר יורד (למה?) ולקבל בצורה זו סדרה y_n ומכיון ששינוי סדר איברים בסדרה לא משפיע על ההתכנסות נקבל $y_n \to x$. מצד שני כעת, הסדרה y_n היא תת סדרה של הסדרה $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$ ולכן מכיון ש $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ אז גם $y_n \to 0$ ומיחידות הגבול נסיק שבהכרח $x = 0$.

$A'' = \varnothing$: נובע מיידית מכך שהסדרה היחידה שמוכלת ב $A' = \{0\}$ היא הסדרה הקבועה (שכל איבריה שווים ל 0) לכן לא קיימת נקודת הצטברות ל A' (למה?) ומכאן $A'' = \varnothing$.

נפתור את סעיפים ב וג יחד: ניתן להיעזר במשפט היינה בורל . A לא ת"מ קומפטי שכן הקבוצה A אינה סגורה ב $\mathbb{R}$ ($0 \notin A$ נקודת הצטברות של A).

מצד שני $A \cup \{0\}$ תת קבוצה סגורה וחסומה של $\mathbb{R}$ ולכן $A \cup \{0\}$ מרחב קומפקטי.

<u>שאלה 3</u>

במרחב מטרי סופי יש מספר סופי של קבוצות פתוחות. אם יש n נקודות במרחב, אזי יש לכל היותר 2^n קבוצות פתוחות (מדוע?). מכאן, ברור שלכל כיסוי פתוח קיים תת כיסוי סופי.

<u>שאלה 4</u>

יהי X מ"מ קומפקטי . יהי $\{K_i\}_{i\in I}$ אוסף קבוצות סגורות, כך שכל חיתוך סופי של קבוצות מאוסף זה אינו ריק. נוכיח ש $\bigcap_{i\in I} K_i \neq \varnothing$. נניח בשלילה כי $\bigcap_{i\in I} K_i = \varnothing$. עפ"י דה-מורגן נקבל כי:

$X = \varnothing^c = \bigcup_{i\in I} K_i^{\,c} = \left(\bigcap_{i\in I} K_i\right)^c$. מכיון שבנוסף $\{K_i\}_{i\in I}$ אוסף סגורות הרי ש $\{K_i^{\,c}\}_{i\in I}$ הוא כיסוי פתוח של X . X קומפקטי ולכן קיימים $i_1,....,i_n$ כך ש $\bigcup_{m=1}^{n}\left(K_{i_m}\right)^c = X$. נשתמש שוב בכלל דה מורגן ונקבל $\bigcap_{m=1}^{n} K_{i_m} = \varnothing$ ומצאנו חיתוך סופי ריק של קבוצות מהאוסף $\{K_i\}_{i\in I}$. סתירה.

<u>שאלה5</u>

א. כל מישור הוא מהצורה $Ax+By+CZ+D=0$.

נתבונן בפונקציה $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f(x,y,z)=Ax+By+CZ+D$. מתקיים $f^{-1}\left(\{0\}\right)=\{(x,y,z) \mid Ax+By+CZ+D=0\}$ מכיוון ש $\{0\}$ סגור ב $\mathbb{R}$ ו- f רציפה הרי ש $f^{-1}\left(\{0\}\right)$ (שהוא המישור) סגור ב $\mathbb{R}^3$.

ב. $B = f^{-1}\left(-\infty,0\right)$ באשר $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ הפונקציה הרציפה $f(x,y,z)=3e^x-35y^5-17y-z^2$ ולכן B פתוחה כתמונה הפוכה של פתוחה (תחת פונקציה רציפה).

ג. פונקצית הדטרמיננטה $\det : M_n\left(\mathbb{R}\right) \to \mathbb{R}$ רציפה ומתקיים $\det^{-1}\left(\mathbb{R}\setminus\{0\}\right)=GL_n\left(\mathbb{R}\right)$ מכיוון ש $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ פתוחה ב- $\mathbb{R}$ נקבל הדרוש.

שאלה 6

א. יש להראות שמתקיים $f^{-1}\left[A^C\right]=\left(f^{-1}[A]\right)^C$

נראה הכלה דו כיוונית:

$\subseteq$: יהי $x\in f^{-1}\left[A^C\right]$ אזי

$$f(x)\in A^C\to f(x)\notin A\to x\notin f^{-1}[A]\to x\in\left(f^{-1}[A]\right)^C$$

$\supseteq$: יהי $x\in\left(f^{-1}[A]\right)^C$ אזי

$$x\notin f^{-1}[A]\to f(x)\notin A\to f(x)\in A^C\to x\in f^{-1}\left[A^C\right]$$

ב. תנאי הכרחי ומספיק הוא ש - f חח"ע ועל.

<u>מספיק</u>: נראה ש $f\left(A^C\right)=\left(f(A)\right)^C$.

$\subseteq$: יהי $y\in f\left(A^C\right)$ אזי קיים $x\in A^C$ כך ש $f(x)=y$. נראה שבהכרח $y\in\left(f(A)\right)^C$. אחרת, $y\in f(A)$. לכן קיים $x_1\in A$ כך ש $f(x_1)=y$ ומכאן $f(x)=f(x_1)$ ובשל חח"ע $x=x_1$. אך זה לא יתכן כי $x\in A^C$ ו- $x_1\in A$.

$\supseteq$: יהי $y\in\left(f(A)\right)^C$ אזי $y\notin f(A)$ מכיוון ש f 'על' בהכרח קיים $x\in X$ כך ש- $f(x)=y$. מכיוון ש $y\notin f(A)$ נקבל כי $y\in f\left(A^C\right)$.

<u>הכרחי</u>: אם f אינה 'על' אזי $f\left(\varnothing^C\right)=f(X)\neq Y=\left(f(\varnothing)\right)^C$. אם f אינה חח"ע אזי קיימים $x_1\neq x_2$ כך ש $f(x_1)=f(x_2)$ אבל אז נקבל

$$\begin{cases} f(x_2)\in f\left(\{x_1\}^C\right) \\ f(x_2)\notin\left(f\left(\{x_1\}\right)\right)^C \end{cases}$$

ומכאן $f\left(\{x_1\}^C\right)\neq\left(f\left(\{x_1\}\right)\right)^C$.

ג. נוכיח ש $f(A)\setminus f(B)\subseteq f(A\setminus B)$ לכל $A,B\subseteq X$. יהי $y\in f(A)\setminus f(B)$ אזי קיים $x\in A$ כך ש $f(x)=y$ וכן $y\notin f(B)$. מכאן $x\in A\setminus B$ ולכן $y\in f(A\setminus B)$.

ד. מ"ל (עפ"י ג') ש- $f(A)\setminus f(B)\supseteq f(A\setminus B)$ לכל $A,B\subseteq X$ $\Leftrightarrow$ f חח"ע.

$(\Rightarrow)$: נניח $A,B\subseteq X$. מכיוון ש - $A\setminus B\subseteq A$ נקבל $f(A\setminus B)\subseteq f(A)$. נראה שאם $y\in f(A\setminus B)$ אזי $y\notin f(B)$. אחרת $y\in f(A\setminus B)\cap f(B)$ ומכאן קיימים $x_1\in A\setminus B, x_2\in B$ כך ש $f(x_1)=f(x_2)=y$ ובשל החח"ע של f נקבל $x_1=x_2$. וזו כמובן סתירה לכך ש- $x_1\notin B, x_2\in B$. מכאן $f(A\setminus B)\subseteq\left(f(B)\right)^C$ ובסה"כ $f(A\setminus B)\subseteq f(A)\cap\left(f(B)\right)^C=f(A)\setminus f(B)$.

$(\Leftarrow)$: אם f לא חח"ע אזי קיימים $x_1 \neq x_2 \in X$ כך ש $f(x_1) = f(x_2)$ אבל אז $\varnothing = f(\{x_1\}) \setminus f(\{x_2\}) \not\subset f(\{x_1\} \setminus \{x_2\}) \in f(x_2)$ בסתירה לנתון

(עבור $X \subseteq \{x_1\} = B, \{x_2\} = A$).

<u>**בונוס**</u>

l_∞ אינו קומפקטי. נניח בשלילה שהוא קומפקטי. עפ"י משפט מ"מ קומפקטי אם ורק אם לכל סדרה יש תת סדרה מתכנסת במרחב. נמצא סדרה ב l_∞ שאין לה תתי סדרות מתכנסות ונקבל סתירה.

נתבונן בסדרה $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. כל תת סדרה שלה אינה קושי (שימו לב למרחקים) ולכן אינה מתכנסת.