תרגיל 4 באינפי 2 - מתמטיקאים

שאלה 1

סעיף 1

הפרכה: ניקח על הקטע $[0,1]$ את

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \neq \frac{1}{2} \\ 1 & x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

סעיף 2

הוכחה:

נניח ש $f \neq 0$ כלומר קיים $c \in [a,b]$ כך ש $f(c) > 0$. נבחר $f(c) > M > 0$. לפי הגדרת רציפות, קיים $\delta > 0$ כך שאם $x \in [c-\delta, c+\delta]$ מתקיים $f(x) > M$.

קל לראות שבכל סכום עליון $\overline{S}$ של דרבו שניקח יתקיים ש

$$\overline{S} > 2\delta M > 0$$

ולכן לא ייתכן שהאינטגרל הוא 0. סתירה.

סעיף 3

הוכחה: נבחר $g(x) = f(x)$ ואז נקבל ש

$$\int\limits_a^b f^2(x) = 0$$

אבל $f^2(x)$ היא פונקציה אי שלילית רציפה. ולכן לפי סעיף 2 $f(x) = 0$

שאלה 2

$$\frac{4}{9}(e-1) \leq \int\limits_0^1 \frac{e^x}{(1+x)(2-x)} \mathrm{d}x \leq \frac{1}{2}(e-1)$$

נחפש נקודות קיצון של הפונקציה

$$g(x) = \frac{1}{(1+x)(2-x)}$$

על התחום $[0,1]$.

ראשית נסתכל על הקצוות

$$g(0) = \frac{1}{2}$$

$$g(1) = \frac{1}{2}$$

כמו כן

$$g'(x) = -\frac{2 - x - (1 + x)}{(1 + x)^2(2 - x)^2}$$

נקבל שהנגזרת מתאפסת כאשר

$$1 - 2x = 0$$

כלומר

$$x = \frac{1}{2}$$

$$g(\frac{1}{2}) = \frac{1}{(1 + \frac{1}{2})(2 - \frac{1}{2})} = \frac{4}{9}$$

כמו כן $g(x)$ היא פונקציה אי שלילית ולכן לפי אי שוויונות של אינטגרלים

$$\frac{4}{9}(e - 1) = \frac{4}{9}\int_0^1 e^x \mathrm{d}x \le \int_0^1 \frac{e^x}{(1 + x)(2 - x)}\mathrm{d}x \le \frac{1}{2}\int_0^1 e^x \mathrm{d}x = \frac{1}{2}(e - 1)$$

שאלה 3

סעיף 1

$$a_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k e^{\frac{k^2}{n^2}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\frac{k}{n}e^{(\frac{k}{n})^2}$$

כלומר זהו סכום רימן על $[0, 1]$ של הפונקציה xe^{x^2}לפי החלוקה

$$P_n = \{0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\}$$

כאשר בוחרים כל פעם את הנקודה הימנית ביותר.
ולכן הסדרה שווה ל

$$\int_0^1 xe^{x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 e^t \mathrm{d}x = \frac{1}{2}(e - 1)$$

(לצורך חישוב האינטגרל השתמשנו בהצבה $t = x^2$)

סעיף 2

בדומה קל לראות ש

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{4n^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2-4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}} = \frac{1}{n}(\frac{1}{\sqrt{4-(\frac{1}{n})^2}} + \frac{1}{\sqrt{4-(\frac{2}{n})^2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{4-(\frac{n}{n})^2}}$$

כלומר זאת שוב החלוקה $P_n = \{0, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\}$ רק הפעם על הפונקציה

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$$

ו

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \mathrm{d}x = \arcsin\frac{x}{2}$$

סעיף 3

$$c_n = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{2^n} \sin\frac{k}{2^n}$$

כאן שוב אנחנו מקבלים סכום רימן של על הקטע $[0,1]$ אבל הפעם עם החלוקה

$$P_n = \{0, \frac{1}{2^n}, \ldots, \frac{2^n-1}{2^n}, 1\}$$

שזאת חלוקה ל $\frac{1}{2^n}$ קטעים לכן זהו סכום רימן של

$$\int\limits_0^1 \sin x \mathrm{d}x = -\cos x|_0^1 = -\cos 1 + 1$$

שאלה 4

לפי לופיטל

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int\limits_0^{x^2} \sin t^2 \mathrm{d}t}{x^6} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x^4 2x}{6x^5} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x^4}{3x^4} = \frac{1}{3}$$

שאלה 5

סעיף א

1) אם $f=0$ אז ברור ש

$$\langle f,f\rangle = 0$$

אם $\langle f,f\rangle = 0$ זה אומר ש

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x = 0$$

ולפי שאלה 1 סעיף 2 זה מכריח $f=0$

2) סימטריות

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)f(x)\mathrm{d}x = \langle g,f\rangle$$

3) לינאריות

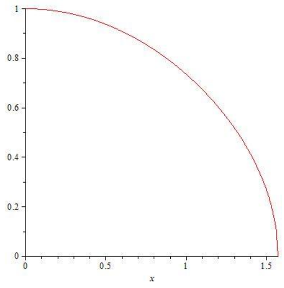
$$\begin{aligned}\langle f+ch,g\rangle &= \int_a^b (f(x)+ch(x))g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b (f(x)g(x)\mathrm{d}x + c\int_a^b h(x))g(x)\mathrm{d}x \\ &= \langle f,g\rangle + c\,\langle h,g\rangle\end{aligned}$$

סעיף ב

צריך פשוט לחשב

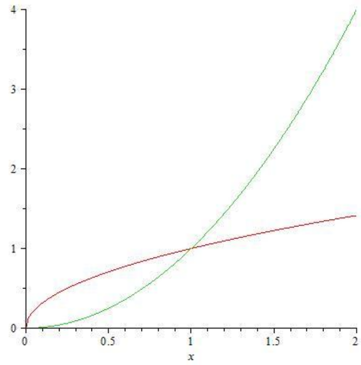
$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m+n)x\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m-n)x\mathrm{d}x = \\ = -\frac{1}{2(m+n)}\ \sin(m+n)x|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2(m-n)}\ \sin(m-n)x|_{-\pi}^{\pi} = 0\end{aligned}$$

שאלה 6



פתרון: $$V=\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt{\cos x}\right)^2dx=\pi\sin x\,\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\pi\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

ב.



פתרון: נמצא את נקודות החיתוך של שתי העקומות

$$y=x^2,\,x=y^2$$

$$x^4=x$$

$$x\left(x^3-1\right)=0$$

$$x_1=0,\,x_2=1$$

$$V=\pi\int_0^1\left(\sqrt{y}\right)^2dy-\pi\int_0^1\left(y^2\right)^2dy=\frac{\pi}{2}y^2\Big|_0^1-\frac{\pi}{5}y^5\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}=\frac{3\pi}{10}$$