

פיתרון תרגיל מספר 5:

תשובה 1:

עפ"י הנתון $\lambda = 30$ בשעה

א. $X \sim P(\lambda = 2.5)$ ב-5 דקות

$$\begin{aligned} P(X \geq 4) &= 1 - (P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)) = \\ &= 1 - \left(\frac{e^{-2.5} 2.5^0}{0!} + \frac{e^{-2.5} 2.5^1}{1!} + \frac{e^{-2.5} 2.5^2}{2!} + \frac{e^{-2.5} 2.5^3}{3!} \right) = 0.2433 \end{aligned}$$

ההסתברות שבמשך 5 דקות ייכנסו לפחות 4 אנשים היא: 0.2433

ב. $X \sim P(\lambda = 5)$ ב-10 דקות

$$\begin{aligned} P(X \geq 4) &= 1 - (P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)) = \\ &= 1 - \left(\frac{e^{-5} 5^0}{0!} + \frac{e^{-5} 5^1}{1!} + \frac{e^{-5} 5^2}{2!} + \frac{e^{-5} 5^3}{3!} \right) = 0.735 \end{aligned}$$

ההסתברות שבמשך 10 דקות ייכנסו לפחות 4 אנשים היא: 0.735

ג. $X \sim P(\lambda = 30)$ בשעה לכן $X \sim P(\lambda = \frac{1}{2})$ בדקה ומכאן ש $X \sim P(\lambda = \frac{N}{2})$ ב-N דקות

לפי נוסחה לתוחלת של התפלגות פואסון: $E(X) = \lambda = \frac{N}{2}$

תשובה 2:

לפי מה שלמדנו $Z \sim P(\lambda + \mu)$.

עבור כל $0 \leq k \leq n$:

$$\begin{aligned} P(X = k | Z = n) &= \frac{P(X = k, Y = n - k)}{P(Z = n)} = \frac{P(X = k)P(Y = n - k)}{P(Z = n)} = \\ &= \frac{e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\mu} \frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!}}{e^{-(\lambda+\mu)} \frac{(\lambda + \mu)^n}{n!}} = \binom{n}{k} \frac{\lambda^k \mu^{n-k}}{(\lambda + \mu)^n} = \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right)^k \left(\frac{\mu}{\lambda + \mu} \right)^{n-k} \end{aligned}$$

לכן ההתפלגות המותנה של X היא $B\left(n, \frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)$. בשיוויון השני השתמשנו באי תלות בין X ל Y

תשובה 3:

בסיס האינדוקציה $r = 1$ טריוויאלי. נניח נכונות עבור X_1, \dots, X_{r-1} ונוכיח עבור X_1, \dots, X_r .

$$\begin{aligned} P(X_1, \dots, X_r = n) &= \sum_{m=0}^n P(X_1, \dots, X_{r-1} = m, X_r = n - m) = \\ \sum_{m=0}^n \frac{e^{-(r-1)\lambda} ((r-1)\lambda)^m}{m!} \cdot \frac{e^{-\lambda} \lambda^{n-m}}{(n-m)!} &= \frac{e^{-r\lambda}}{n!} \sum_{m=0}^n \frac{n!}{m!(n-m)!} ((r-1)\lambda)^m \lambda^{n-m} = \\ &= \frac{e^{-r\lambda}}{n!} ((r-1)\lambda + \lambda)^n = \frac{e^{-r\lambda}}{n!} (r\lambda)^n \end{aligned}$$

תשובה 4:

מספר הסטודנטים X_k שמאחרים ב- k דקות לשיעור $k=1, \dots, 10$, מתפלג פואסוני עם פרמטר $\lambda=2$. המשתנים בלתי תלויים. בתום 10 דקות לא מכניסים סטודנטים לשיעור.
א.

סכום מספר המאחרים ב- n הדקות הראשונות מתפלג פואסוני עם פרמטר $n\lambda$ עבור n קטן או שווה לעשר. עבור n גדול מעשר נספרים רק המאחרים של עשר הדקות הראשונות ואלו מתפלגים פואסוני עם 10λ .
ב.

נזכר שבתהליך פואסוני אין תלות בין מספר המופעים במרקי זמן זרים. נסמן S'_7 מספר המאחרים בין סיום דקה 2 לסיום דקה 9. יש שבע דקות בפרק זמן זה ולכן מספר המאחרים מתפלג פואסוני עם $7\lambda=14$. עבור כל $k > 2$, ההסתברות היא:

$$\begin{aligned} P(S_9 = k | S_2 = 2) &= \frac{P(S_9 = k, S_2 = 2)}{P(S_2 = 2)} = \\ &= \frac{P(S_2 = 2)P(S'_7 = k - 2)}{P(S_2 = 2)} = P(S'_7 = k - 2) = \frac{e^{-14} (14)^{k-2}}{(k-2)!} \end{aligned}$$

תשובה 5:

א.

$$E[X!] = \sum_x x! P_X(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k! \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k = \frac{e^{-\lambda}}{1-\lambda}$$

ב.

$$\begin{aligned} E[(X+1)!] &= \sum_x (x+1)! P_X(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)! \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \lambda^k \\ &= e^{-\lambda} \frac{\partial}{\partial \lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{k+1} = e^{-\lambda} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{\lambda}{1-\lambda} \right) = \frac{e^{-\lambda}}{(1-\lambda)^2} \end{aligned}$$

בשני המקרים התשובה קיימת עבור $0 \leq \lambda < 1$ בלבד.

למי שלא יודע: θ הוא סימון של נגזרת.

תשובה 6:

א. נגדיר מ"מ X – מספר התקלות במשך יום אחד :

$$X \sim \text{Pois}(\mu = 5) \Rightarrow$$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - e^{-5} * \frac{(5)^0}{0!} = 0.9932$$

ב. נגדיר מ"מ X_2 – מספר התקלות במשך יומיים :

$$X_2 \sim \text{Pois}(\mu = 5 * 2) \Rightarrow$$

$$P(X_2 = 0) = e^{-10} * \frac{(10)^0}{0!}$$

ג. נגדיר מ"מ Y – מספר ימי עבודה "מוצלחים" במשך חודש עבודה :

$$Y \sim \text{Bin}(n = 25, p)$$

$$p = P(X \leq 1) = e^{-5} * \frac{(5)^0}{0!} + e^{-5} * \frac{(5)^1}{1!} = 0.125$$

$$P(Y \geq 10) = \sum_{i=10}^{25} \binom{25}{i} 0.125^i * 0.875^{25-i}$$

תשובה 7:

נסמן X – מספר הכדורים שנפלטו בשנייה הראשונה

נסמן Y – מספר הכדורים שנפלטו בארבע השניות הנותרות מבין החמש

נסמן Z – מספר הכדורים שנפלטו סך הכול בחמש השניות

$$P(X = k | Z = 3) = \frac{P(X = k \cap Z = 3)}{p(Z = 3)} = \frac{P(X = k \cap Y = 3 - k)}{p(Z = 3)} = \dots$$

$$\dots = \frac{P(X = k)P(Y = 3 - k)}{p(Z = 3)} = \frac{e^{-0.5} \frac{0.5^k}{k!} e^{-2} \frac{2^{3-k}}{(3-k)!}}{e^{-2.5} \frac{2.5^3}{3!}} = \binom{3}{k} \left(\frac{1}{5}\right)^k \left(\frac{4}{5}\right)^{3-k}$$

שימו לב – זוהי התפלגות בינומית. לא במקרה.

בהינתן שנפלטו 3 כדורים בחמש שניות. כל כדור נפלט בשנייה הראשונה בסיכוי חמישית באופן בלתי תלוי באחרים. לכן ההסתברות שנפלטו k כדורים בשנייה הראשונה היא בינומית עם $n=3$.

תשובה 8:

א. $P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$. עמ"נ למצא מקסימום נגזור לפי λ ונמצא את k שיקיים את המשוואה

$$\lambda = k \quad e^{-\lambda} \cdot \lambda^{k-1} (k - \lambda) = 0 \quad \text{מכאן} \quad \frac{\partial P(X=k)}{\partial \lambda} = \frac{1}{k!} (e^{-\lambda} \cdot k \lambda^{k-1} - e^{-\lambda} \cdot \lambda^k) = 0$$

$$P(X = \text{even}) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X = 2k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^{2k}}{(2k)!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} = \quad \text{ב.}$$

נשים לב : האיבר ה- $2k$ בפיתוח לטור חזקות של $e^{-\lambda}$ הוא לזה של e^{λ} והאיבר ה- $2k + 1$ בפיתוח לטור חזקות של $e^{-\lambda}$ הוא הנגדי לזה של e^{λ} (שכן $(-1)^{2k+1} = -1$)
לכן אם נסכום אותם כל האיברים האיזוגיים יתאפסו ואילו את האיברים הזוגיים נקבל פעמיים. כדי לפצות על כך נחלק ב- 2.

שאלה 9: נפתרה בכיתה.