לינארית 2-מטלה 2- העתקות לינאריות

פתרון

תרגיל 0. עבור כל אחת מההעתקות הבאות קבעו והוכיחו האם הן העתקות לינאריות או לא.

א. $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ המוגדרת כך: $T(x,y) = (xy, x^2)$

פתרון: לא העתקה לינארית כי לדוגמה T(-(1,1))=T(-1,-1)=(1,1)

אבל T(1,1)=-(1,1)=(-1,-1)–.

ב. $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ המוגדרת כך: $T(x,y) = (\sin x, \cos y)$

פתרון: לא העתקה לינארית. לדוגמה: $T(\pi,0) = (0,1)$ אבל $T(\frac{\pi}{2},0)+T(\frac{\pi}{2},0) = (1,1) + (1,1) = (2,2)$

ג. תהא $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ אזי העתקה $T_A:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ המוגדרת $T_A(v) = Av$.

פתרון: נראה כי העתקה לינארית:

$$T_A(av_1+v_2)=A(av_1+v_2) = aAv_1 + Av_2=aT_A(v_1) + T_A(v_2)$$

תרגיל 1. א. $V=\mathbb{R}_2[x]$. מצא את ההעתקה הלינארית $T: V -> V$ המקיימת $T(x) = 1, T(x^2) = -2x + 1$, $T(1) = x + 2$.

פתרון: נשים לב כי $1, x, x^2$ בסיס של $\mathbb{R}_2[x]$. ולכן לפי משפט ההגדרה נוכל להגדיר העתקה לינארית כנ"ל.
$T(a + bx + cx^2)= aT(1) + bT(x) + cT(x^2) = a(x + 2) + b(1) + c(-2x + 1) = (2a + b + c) + (a - 2c)x$

ב . יהיו $v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\ v_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\ v_3 = \begin{pmatrix}1\\4\\7\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

עוד יהיו

$w_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\ w_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\ w_3 = \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

האם קיימת העתקה $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ המקיימת $Tv_i = w_i$ לכל i?

פתרון: נשים לב כי הוקטורים תלוים לינארית ומתקיים $v_3 = 3v_1 - 2v_2$.

אם מתקיים $Tv_1 = w_1, Tv_2 = w_2$ אזי בהכרח Tv_3 צריך להיות מוגדר לפי הקשר

$$w_3 = Tv_3 = T(3v_1 - 2v_2) = 3\,Tv_1 - 2\,Tv_2 = 3w_1 - 2w_2$$

$$\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$$

ולכן לא ניתן להגדיר העתקה לינארית כנ"ל.

תרגיל 2. $V = \mathbb{R}_2[x], W = \mathbb{R}^4$, האם קיימת $T: V -> W$ העתקה לינארית חח"ע? אם כן, מצא אותה.

פתרון: קיימת. לדוגמה ניקח את $T(a + bx + cx^2) = \begin{pmatrix}a\\b\\c\\c\end{pmatrix}$. נשים לב $(a + bx + cx^2) \in Ker(T)$ אם ורק אם

$T(a+bx+cx^2)=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ אם ורק אם a=b=c=0 שזהו פולינום האפס ולכן KerT={0}.

תרגיל 3. נסתכל על ההעתקה $T: \mathbb{R}^{n\times n} -> \mathbb{R}$ המוגדרת על ידי $T(A) = trace(A)$.

א. הוכח כי T העתקה לינארית.

פתרון: לכל a∈ℝ, $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מתקיים:

$$trace(a*A+B) = a*trace(A) + trace(B)$$

ב. מצא בסיס לגרעין העתקה.

פתרון: נשים לב כי T היא על. ולכן $dimImT = dim\mathbb{R} = 1$. ממשפט הדרגה נסיק כי $dimKerT = dimV - dimImT = n^2-1$. כעת, לפי משפט שלישי חינם מספיק למצוא n^2-1 מטריצות בת"ל ששיכות לגרעין ואז הם יהיו בסיס.

למשל המטריצות: $\{E_{i,j} | i \neq j\} \cup \{E_{1,1} - E_{i,i} | 2 \leq i \leq n\}$. בקבוצה הנ"ל יש אכן

$(n^2-n)+(n-1) = n^2-1$ מטריצות בת"ל.

תרגיל 4. $V=\mathbb{R}^3$. תהיי העתקה לינארית T:V->V המוגדרת כך: $T(x,y,z) = (x+y, y+z, z)$. מצא את ממדי ImT,KerT, ומצא בסיס לImT.

פתרון: נחשב את dimKerT. אם (x,y,z)∈KerT אז T(x,y,z)=(x+y,y+z,z)=(0,0,0)

למערכת

x+y=0

y+z=0

z=0

יש פתרון יחיד והוא הפתרון הטרוויאלי. ולכן KerT={(0,0,0)} ולכן dimKerT=0. ולכן לפי משפט הדרגה

dimImT=3-dimKerT=3-0=3.

כלומר ImT הוא תת מרחב ממד 3 של $\mathbb{R}^3$ ולכן $ImT=\mathbb{R}^3$. נוכל לקחת את הבסיס הסטנדרטי (e_1, e_2, e_3) כבסיס לImT.

תרגיל 5.

פתרון: הפרכה: ניקח $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}$ ו- $S\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x\\0\end{pmatrix}$ ומתקיים $Ker(T)=Ker(S)=span\left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$

ו- $Im(T)=Im(S)=span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$ אך $T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \neq S\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

תרגיל 6. תהא $T: V -> V$ העתקה לינארית. הוכח:

א. $KerT \subseteq KerT^2$.

פתרון: יהא $v\in KerT$ אזי $Tv=0$ ולכן $T^2v=T(Tv)=T0=0$ כלומר $v\in KerT^2$

ב. $ImT^2\subseteq ImT$

פתרון: $v\in ImT^2$ ולכן קיים w כך ש $T^2w=v$. ולכן T(Tw)=v . כלומר $v\in ImT$