משוואות דיפרנציאליות רגילות - תרגול 7

מערכת משוואות דיפרנציאליות רגילות

הצורה הכללית: $\vec{y}' = \vec{f}(t,\vec{y})$

כאן רוצים לפתור מספר מד"ר. בו זמנית של פונ' התלויות במשתנה אחד, בד"כ t. אנו נפתור מערכות לינאריות.

מערכת מד"ר לינאריות

צורת המערכת: $\vec{y}'(t) = A(t)\vec{y} + \vec{b}(t)$

כאשר:

$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$ ← הפונקציה שיש למצוא.

הערה: כדי לא לסבך נסמן בנגזרות כרגיל ולא נשתמש ב'דוט' על אף שאנו גוזרים לפי הזמן

$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}$ מטריצה שרכיביה $a_{ij}(t)$ פונ' של t.

$\vec{b}(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$ וקטור שרכיביו פונ' של t.

אם $\vec{b}(t) \equiv \vec{0}$ נאמר שהמערכת הומוגנית. אחרת, אי-הומוגנית.

- ישנה אנלוגיה למה שנלמד עד כה: הפתרון הכללי לאי-הומוגני:

$$\vec{y}(t) = \underbrace{\vec{y}_g(t)}_{\text{פתרון כללי להומוג'}} + \underbrace{\vec{y}_p(t)}_{\text{פתרון פרטי לאי הומוג'}}$$

ואם $\vec{y}^{(1)}, \dots, \vec{y}^{(n)}$ פונ' (כל אחת הנה וקטור של פונ') בת"ל הפותרות את המערכת אזי נגדיר ורונסקיאן:

$$W(\vec{y}^{(1)}, \dots, \vec{y}^{(n)}) = \det \underbrace{\begin{pmatrix} | & | & & | \\ \vec{y}^{(1)} & \vec{y}^{(2)} & \cdots & \vec{y}^{(n)} \\ | & | & & | \end{pmatrix}}_{Y}$$

Y נקראת מטריצה יסודית

דוגמא: פתור את המערכת הבאה:

$$\begin{cases} x'(t) = -y(t) & \mathrm{I} \\ y'(t) = x(t) & \mathrm{II} \end{cases}$$

פתרון: נכתוב בצורה מטריציונית:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

נגזור את המשוואה הראשונה I:

$$x'' = -y' \underset{\substack{\downarrow \\ \text{II לפי משוואה}}}{=} -x$$

ולכן $x''+x=0$, מ. מאפיינת $\lambda^2+1=0$

ולכן $\lambda = \pm i$

$$x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$$

ממשוואה I נמצא את y ,

$$y(t) = -x'(t) = c_1 \sin t - c_2 \cos t$$

והפתרון:

$$\boxed{\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \cos t + c_2 \sin t \\ c_1 \sin t - c_2 \cos t \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}}$$

דוגמא: כאן הנעלם הינו $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} y_1' = y_1 & \mathrm{I} \\ y_2' = 2y_2 & \mathrm{II} \end{cases}$$

ממשוואה I $\Leftarrow$ $y_1 = c_1 e^t$

ממשוואה II $\Leftarrow$ $y_2 = c_2 e^{2t}$

ולכן

$$\boxed{\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^t \\ c_2 e^{2t} \end{pmatrix} = c_1 \underbrace{\begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{y}^{(1)}} + c_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ e^{2t} \end{pmatrix}}_{\vec{y}^{(2)}}}$$

2 ב3

בדוגמא הראשונה המטריצה היסודית $Y=\begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ \sin t & -\cos t\end{pmatrix}$

ובדוגמא השנייה $Y=\begin{pmatrix}e^{t} & 0\\ 0 & e^{2t}\end{pmatrix}$

$W=\det Y$ ולכן אם $W\neq 0$ הפתרון בת"ל

אחרת אם $W=0$ הן ת"ל.

נוסחת ליוביל / Joseph-Liouville (צרפתי) (אוסטרוגרדצקי)

הצגה אחר

Abel-Jacobi-Liouville identity

הכללה של

לכל t,t_0 בתחום המדובר

$$\underbrace{\det(Y(t))}_{W(Y(t))}=\underbrace{\det(Y(t_0))}_{W(Y(t_0))}\cdot e^{\int_{t_0}^{t} tr(A(s))\,ds}$$

(עקבה trace)

* נשים לב כי ניתן לראות מנוסחה זו שאו שהורונסקיאן מתאפס בכל נקודה או שהוא אינו מתאפס כלל.

בעזרת נוסחה זו ניתן למצוא פתרון אחד אם יודעים $n-1$ פת' אחרים.

<u>דוגמא:</u> פתור את המערכת $\vec{y}\,'=\begin{pmatrix}1 & -1/t\\ 1+t & -1\end{pmatrix}\vec{y}$ בתחום $t\in(0,\infty)$

העזר בכך ש: $\vec{y}_p=\begin{pmatrix}1\\ t\end{pmatrix}$ פתרון פרטי.

<u>פתרון:</u> יהי $\begin{pmatrix}y_1(t)\\ y_2(t)\end{pmatrix}$ פתרון נוסף של המערכת, בת"ל ב-$\begin{pmatrix}1\\ t\end{pmatrix}$

נבנה מטריצה יסודית

$$Y=\begin{pmatrix}y_1(t) & 1\\ y_2(t) & t\end{pmatrix}$$

במקרה שלנו

$$A(s)=\begin{pmatrix}1 & -1/s\\ 1+s & -1\end{pmatrix}\Rightarrow tr(A(s))=0$$

ניקח $t_0\in(0,\infty)$ קבוע. אזי לכל $t\in(0,\infty)$

$$\det(Y(t)) = \det(Y(t_0))\, e^{\int_{t_0}^{t} 0\, ds}$$

$$t\cdot y_1(t) - y_2(t) = \det(Y(t_0)) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{לא תלוי ב } t}}{=} C_1 \qquad (*)$$

לפי המערכת:

$$y_1' = y_1(t) - \frac{y_2(t)}{t} = \frac{t\,y_1(t) - y_2(t)}{t} = \frac{C_1}{t}$$

$$\Rightarrow y_1(t) = C_1 \ln t + C_2$$

אין צורך בערך מוחלט שכן $t>0$.

ממשוואה $(*)$ נקבל גם את y_2:

$$\frac{y_2(t)}{t} = y_1(t) - y_1'(t) = C_1 \ln t + C_2 - \frac{C_1}{t}$$

$$\Rightarrow y_2(t) = C_1(t\ln t - 1) + C_2 t$$

מסה"כ קיבלנו

$$\begin{pmatrix} C_1 \ln t + C_2 \\ C_1(t\ln t - 1) + C_2 t \end{pmatrix}$$

נוכל לקחת $\begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 0 \end{cases}$ ולקבל פתרון פרטי $\begin{pmatrix} \ln t \\ t\ln t - 1 \end{pmatrix}$

שהוא בת"ל ב $\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$. המטריצה היסודית:

$$Y = \begin{pmatrix} \ln t & 1 \\ t\ln t - 1 & t \end{pmatrix}$$

והפתרון הכללי של המערכת:

$$\boxed{\vec{y} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \ln t \\ t\ln t - 1 \end{pmatrix}}$$

Picard approximation / איטרציות פיקארד
Émile Picard (צרפתי) / שיטת הקירובים של פיקארד

בשיטת הקירובים של פיקארד מראים כי קיים פתרון, והוא יחיד, למד"ר מסדר ראשון עם תנאי התחלה.

(נקרא גם משפט קושי-ליפשיץ / משפט פיקארד-לינדלוף)

משפט: נתונה בעיית קושי הבאה:

$$\begin{cases} y'(t)=f(t,y(t)) \\ y(t_0)=y_0 \end{cases} \qquad t\in[t_0-\varepsilon,\, t_0+\varepsilon]$$

ונניח כי f רציפה ליפשיץ (מקיימת את תנאי ליפשיץ) ב-y ורציפה לפי t. אז קיים $\varepsilon>0$ עבורו קיים פתרון, $y(t)$, והוא יחיד, לבעיית קושי לעיל בקטע $[t_0-\varepsilon,\, t_0+\varepsilon]$.

דוגמא: פתור בעזרת שיטת קירובי פיקארד את בעיית קושי הבאה:

$$\begin{cases} y'(t)=y(t) \\ y(0)=1 \end{cases}$$

(רמז: חשב את הקירובים עד סדר 3 ונסה לנחש את הפתרון המדויק)

פתרון: נשים לב כי $f(t,y(t))=y(t)$ מקיימת את תנאי ליפשיץ. $t_0=0$ ו- $y_0=1$.

בניית הקירובים:

$$\begin{cases} \varphi_0(t)=y_0 \\ \varphi_{n+1}(t)=y_0+\int_{t_0}^{t} f(s,\varphi_n(s))\,ds \end{cases}$$

והפתרון

$$y(t)=\lim_{n\to\infty}\varphi_{n+1}(t)$$

בדוגמא:

$$\varphi_0(t)=1$$

$$\varphi_1(t)=y_0+\int_{t_0}^{t} f(s,\varphi_0(s))\,ds = 1+\int_0^t f(s,1)\,ds =$$

$$= 1+\int_0^t 1\,ds = \boxed{1+t}$$

$$\varphi_2(t)=y_0+\int_{t_0}^{t} f(s,\varphi_1(s))\,ds = 1+\int_0^t (1+s)\,ds =$$

$$= 1+\left[s+\frac{s^2}{2}\right]_0^t = \boxed{1+t+\frac{t^2}{2}}$$

$$\varphi_3(t)=1+\int_0^t\left(1+s+\frac{s^2}{2}\right)ds = 1+\left[s+\frac{s^2}{2}+\frac{s^3}{2\cdot 3}\right]_0^t=\boxed{1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{2\cdot 3}}$$

ניתן להראות באינדוקציה:

$$\varphi_n(t)=1+t+\frac{t^2}{2}+\dots+\frac{t^n}{n!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!}$$

$$\Rightarrow y(t)=\lim_{n\to\infty}\varphi_n(t)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}=e^t$$

$$\boxed{y(t)=e^t}$$

ז"א הפתרון הכללי

<u>הקשר בין מערכת מד"ר לבין מד"ר מסדר גבוה</u>

ניתן לכתוב מד"ר מסדר n בצורה "נורמלית" כמערכת של n מד"ר מסדר ראשון. (להפך לא נכון)

<u>דוגמא:</u> פתור $2y''-5y'+y=0$

<u>פתרון:</u> נעביר לצורה נורמלית $y''-\frac{5}{2}y'+\frac{1}{2}y=0$

נגדיר
$$\begin{cases} y_1=y & \text{I}\\ y_2=y' & \text{II}\end{cases}$$

כעת אם נגזור את שתי המשוואות נקבל:

$$\begin{cases} y_1'=y'\overset{\text{לפי II}}{=}y_2 \\ y_2'=y''\underset{\text{מהמד"ר}}{=}-\frac{1}{2}y+\frac{5}{2}y'=-\frac{1}{2}y_1+\frac{5}{2}y_2\end{cases}$$

ובצורה מטריצונית:

$$\boxed{\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}'=\begin{pmatrix}0&1\\-\frac{1}{2}&\frac{5}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}} \longrightarrow$$

מערכת מד"ר