אביב תשע"ט

פיסיקה למתמטיקאים

תרגיל 6: מכניקת הקוונטים: מרחב הילברט, פונקצית, אופרטורים

1. יהי H מרחב הילברט. הוכיחו:

(א) אם $\{x_n\} \subset H$ סדרת קושי, אזי קיים $x \in H$ כך ש $\|x_n\| \to \|x\|$.

(ב) אם $\{x_n\} \subset H$ סדרה, כאשר $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$, אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ מתכנס ב H.

2. הוכיחו את התכונות הבאות של יחסי חילוף

(א) אנטי סימטריות $[A,B] = -[B,A]$

(ב) $[A, f(A)] = 0$

(ג) $[A, Const] = 0$

(ד) לינאריות $[A+B, C] = [A,C] + [B,C]$

(ה) $[AB, C] = A[B,C] + [A,C]B$

(ו) זהות יעקובי $[A,[B,C]] + [C,[A,B]] + [B,[C,A]] = 0$

(ז) אם $[B,[A,B]] = 0$ אז $[A, B^n] = nB^{n-1}[A,B]$
(הגדירו $g_n = [A, B^n]$ והוכיחו באינדוקציה את הרקורסיה $g_n = Bg_{n-1} + g_1 B^{n-1}$. כעת רשמו את g_n כסכום $g_n = \sum_{k=0}^{n-1} B^k g_1 B^{n-k-1}$ והראו כי $g_n = nB^{n-1} g_1$ כאשר $[B, g_1] = 0$).

3. הוכיחו כי לכל וקטור $|\varphi\rangle$ במרחב הילברט H מתקיים $\|U\varphi\|^2 = \|\varphi\|^2$ ($= \langle U\varphi|U\varphi\rangle = \langle\varphi|\varphi\rangle$) אם ורק אם U אופרטור יוניטרי. כלומר אופרטור U שומר על נורמה אם ורק אם $U^\dagger = U^{-1}$.
(הדרכה: על מנת להוכיח כי U יוניטרי התבוננו בוקטור $|\varphi\rangle + \lambda|\chi\rangle$ כאשר $|\varphi\rangle, |\chi\rangle \in H$, ו λ סקלר מרוכב. בדקו את המכפלה הפנימית עבור $\lambda = 1$ ו $\lambda = i$ והסיקו כי U יוניטרי).

4. נתון אופרטור התלוי בזמן $A(t)$.

(א) הוכיחו כי ההתפתחות בזמן של ערך התצפית של $A(t)$ נתונה ע"י

$$\frac{d}{dt}\langle A\rangle = -\frac{i}{\hbar}\langle[A,H]\rangle + \left\langle\frac{\partial A}{\partial t}\right\rangle$$

(ב) השתמשו בתוצאת סעיף (א) כדי להוכיח את משפט ארנפסט המתאר את הקשר בין הדינמיקה של ערכי התוחלת של אופרטורי המקום והתנע $\frac{d}{dt}\langle \mathrm{x}\rangle = \langle p\rangle/m$, $\frac{d}{dt}\langle p\rangle = -\left\langle \frac{dV}{dx}\right\rangle$ עבור חלקיק בעל מסה m.

(ג) עבור אוסילטור הרמוני עם פוטנציאל $V(x) = m\omega^2 x^2/2$, הראו כי התוחלת של אופרטור המקום נעה על פי המשוואה הקלאסית $\frac{d^2}{dt^2}\langle x\rangle = -\omega^2\langle x\rangle$

5. חלקיק מוגבל לנוע על ציר x בלבד (בעיה חד מימדית) תחת השפעת פוטנציאל כלשהוא $V(x)$.

(א) עבור חלקיק קשור, כמה מצבים עצמיים בלתי תלויים לינארית קיימים עבור אנרגיה נתונה E?

(ב) אופרטור הזוגיות $\hat{P}$ מוגדר כך שבמרחב x הפעולה שלו היא $\hat{P}x = -x$. מצאו את הערכים העצמיים של $\hat{P}$.

(ג) הוכיחו כי אם $V(x) = V(-x)$ אז $[\hat{H},\hat{P}] = 0$, כאשר $\hat{H}$ הוא אופרטור האנרגיה של המערכת.

(ד) הוכיחו כי אם $[\hat{H},\hat{P}] = 0$ אז כל מצב עצמי קשור של האנרגיה הוא בעל זוגיות מוגדרת היטב, כלומר זוגי ($\psi(x) = \psi(-x)$) או אי זוגי ($\psi(x) = -\psi(-x)$).