מבחן מועד ג בדידה קיץ תשפא

כ"ח תשרי תשפ"ב, 4.10.2021

מרצים: עדי בן צבי, תמר בר־און, אריאל ויצמן, אלעד עטייא, ארז שיינר.
מתרגלים: אחיה בר־און, תמר בר־און, גיא ברגר, עוזי חרוש, עידו פלדמן, נעם פרץ, גלעד פורת קורן, הראל רוזנפלד.
הנחיות:

- ענו על כל השאלות.
- חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.
- השאלות לא מסודרות בהכרח לפי רמת קושי־ מומלץ להתחיל עם שאלות שאתם יודעים לפתור.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שאתם יודעים לענות. חלקו את זמנכם בתבונה!.

תשובות יש לכתוב על גבי הטופס בלבד. מחברת הטיוטה לא תבדק..

ניתן לענות משני צידי הדף..

בהצלחה!

1. (20 נק') תהיינה A, B, C קבוצות. הוכיחו או הפריכו כל אחד מהסעיפים הבאים:

   (א) אם $A \cup B \subseteq C$ אז $C \setminus A = C \setminus B$.

   (ב) אם $A \Delta B \subseteq C$ אז $C \setminus A = C \setminus B$.

   (ג) $A \cap B \neq \emptyset$ אם ורק אם $P(A) \cap P(B) \neq \emptyset$.

   (ד) $P(B) \setminus P(A) \subseteq P(B \setminus A)$.

2. (21 נק') תהיינה פונקציות $f, g, h \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ המקיימות: $h = f \circ g$. הוכיחו או הפריכו כל אחד מהסעיפים הבאים:

   (א) אם הפונקציות f, g שתיהן אינן הפיכות אז h אינה הפיכה.

   (ב) אם h הפיכה אז f הפיכה.

   (ג) אם g הפיכה אז $Im(h) = Im(f)$.

3. (24 נק') נסמן ב־ D את קבוצת כל יחסי השקילות על $\mathbb{N}$. נגדיר יחס S על D באופן הבא: לכל $R_1, R_2 \in D$ מתקיים:

$$(R_1, R_2) \in S \iff \forall n \in \mathbb{N} : [n]_{R_1} \subseteq [n]_{R_2}$$

(במילים: הזוג (R_1, R_2) שייך ליחס S אם ורק אם לכל מספר טבעי מתקיים שמחלקת השקילות שלו לפי יחס השקילות R_1 מוכלת במחלקת השקילות שלו לפי יחס השקילות R_2).

   (א) הוכיחו: S יחס סדר חלקי.

   (ב) הוכיחו או הפריכו: S יחס סדר לינארי. (כלומר, האם לכל $R_1, R_2 \in D$ מתקיים: $(R_1, R_2) \in S \vee (R_2, R_1) \in S$?)

   (ג) האם קיים ב־ D איבר גדול ביותר (מקסימום)? הוכיחו את תשובתכם.

(ד) האם קיים ב־ D איבר קטן ביותר (מינימום)? הוכיחו את תשובתכם.

4. (20 נק') על קבוצת הפונקציות $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ נגדיר יחס $\sim$ על ידי: לכל $f,g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ מתקיים:

$$f \sim g \iff \exists k \in \mathbb{N} \forall n > k : f(n) = g(n)$$

(במילים: הזוג (f,g) שייך ליחס $\sim$ אם ורק אם ישנו k טבעי כך שהפונקציות זהות לכל $n > k$).

(א) הוכיחו: $\sim$ יחס שקילות על $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

(ב) מצאו פונקציה $g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ המקיימת: כל פונקציה $f \in [g]_{\sim}$ איננה על. הוכיחו את תשובתכם.

(ג) תהא $f \in [I]_{\sim}$ (כאשר I זוהי פונקציית הזהות), ונסמן $A = \{n \in \mathbb{N} \mid f(n) = n\}$ (כלומר, A זו קבוצת נקודות השבת של f). הוכיחו: $|A| = \aleph_0$.

(ד) קבעו והוכיחו אם $[I]_{\sim}$ סופית, מעוצמה $\aleph_0$, מעוצמה $\aleph$, מעוצמה $2^{\aleph}$ או אחרת (כאשר I זוהי פונקציית הזהות).

5. (24 נק') הגדרה: קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}$ תקרא <u>מבודדת</u> אם: לכל $x \in A$ מתקיים: $x+1 \notin A$.

(א) תהא D שרשרת ביחס ההכלה של קבוצות מבודדות. הוכיחו: האיחוד

$$U = \bigcup_{X \in D} X$$

היא קבוצה מבודדת.

(ב) הוכיחו: קיימת קבוצה מבודדת S שהיא מקסימלית (כלומר, לכל קבוצה מבודדת A כך ש־ $S \subseteq A$ מתקיים $S = A$).

(ג) האם קיימת קבוצה מבודדת S מקסימלית המקיימת: $S \cap \{1,2,4\} = \emptyset$? הוכיחו את תשובתכם.

(ד) תהא S קבוצה מבודדת מקסימלית. הוכיחו או הפריכו: $|S| = \aleph$.