אינטגרלים כפולים

נבחר נקודה כלשהי בכל תת מלבן ונסמן את הנקודה שנבחרה במלבן ע"י (x_k^*, y_k^*). המכפלה $f(x_k^*, y_k^*)\,\Delta A_k$ שווה לנפח התיבה המלבנית ששטח בסיסה הוא ΔA_k וגובהה $f(x_k^*, y_k^*)$. הסכום של הנפחים הנ"ל הוא

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*)\,\Delta A_k$$

הגבול של סכומי רימן הנ"ל הוא

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*)\,\Delta A_k = \iint_R f(x,y)\;\mathrm{d}A$$

כאשר R הוא תחום במישור.

משפט

יהי R מלבן המוגדר ע"י השוויונים

$$a \le x \le b \qquad c \le y \le d$$

אם $f(x,y)$ רציפה בR אז

$$\iint_R f(x,y)\;\mathrm{d}A = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\;\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\;\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

דוגמה 1

חשב את האינטגרל הכפול

$$\iint_R y^2x^2\,\mathrm{d}A$$

על פני המלבן $R = \{(x,y) : -3 \le x \le 2, 0 \le y \le 1\}$

פתרון

נסמן $f(x,y)=x^2y^2$. ברור כי f רציפה והתחום מלבני.

$$\iint\limits_R y^2x^2\,\mathrm{d}A=\int_0^1\int_{-3}^2 y^2x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^1\left(\int_{-3}^2 y^2x^2\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}y=$$

$$=\int_0^1\left(\left[\frac{y^2x^3}{3}\right]_{x=-2}^{x=2}\right)\,\mathrm{d}y=\int_0^1\left(\frac{8y^2}{3}+\frac{27y^2}{3}\right)\,\mathrm{d}y=$$

$$=\left[\frac{8y^3}{9}+3y^3\right]_0^1=\frac{8}{9}+3$$

מה קורה אם התחום אינו מלבני?
נחשב את האינטגרל באופן הבא:

$$\iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\begin{array}{l}=\int_c^d\,\mathrm{d}y\int_{x_1(y)}^{x_2(y)}f(x,y)\,\mathrm{d}x\\=\int_a^b\,\mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}f(x,y)\,\mathrm{d}y\end{array}$$

דוגמה 2

חשבו את $\iint\limits_S(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ בתחום S החסום ע"י הקווים $y=0,y=1$ ו$y=x$.

פתרון

ניתן לראות כי S הוא משולש. נרשום את התחום S באופן הבא:

$$S=\{0\le x\le 1,1\ge y\ge x\}$$

הערה: שימו לב שחייבים במקרה זה פונקציה, אחרת נקבל במקרה זה ריבוע.

$$\iint\limits_S(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^1\,\mathrm{d}x\int_x^1(x+y)\,\mathrm{d}y=\int_0^1\left(x+\frac{1}{2}-x^2-\frac{x^2}{2}\right)\,\mathrm{d}x=\left[\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}x-\frac{x^3}{2}\right]_0^1$$

אם נעשה את האינטגרציה לפי $\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$ אז קל לראות ש$0\le y\le 1$ ובנוסף $0\le x\le y$, ולכן האינטגרל המבוקש הוא

$$\int_0^1\,\mathrm{d}y\int_0^y(x+y)\,dx=-\int_0^1\,\mathrm{d}y\left[\frac{x^2}{2}+yx\right]_{x=0}^{x=y}=\int_0^1\left(\frac{y^2}{2}+y^2\right)\,\mathrm{d}y=\int_0^1\left(\frac{3}{2}y^2\right)\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}$$

ז"א הפכנו סדר אינטגרציה והראינו שהאינטגרלים שווים.

דוגמה 3

חשבו את האינטגרל $I = \iint\limits_S x^2 y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ עבור S התחום החסום ע"י הקווים $x = -2$, $x = 2$, $y^2 - x^2 = 1$

פתרון

$$y^2 - x^2 = 1 \Rightarrow y^2 = 1 + x^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{1 + x^2}$$

ולכן התחום הדרוש S הוא

$$S = \left\{-2 \le x \le 2, -\sqrt{1+x^2} \le y \le \sqrt{1+x^2}\right\}$$

ולכן האינטגרל המבוקש הוא

$$\int_{-2}^{2} \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{1+x^2}}^{\sqrt{1+x^2}} x^2 y \,\mathrm{d}y = \int_{-2}^{2} \mathrm{d}x \left[x^2 \frac{y^2}{2}\right]_{y=-\sqrt{1+x^2}}^{y=\sqrt{1+x^2}} =$$

$$= \int_{-2}^{2} \left(x^2 \frac{\left(1+x^2\right)}{2} - \frac{x^2\left(1+x^2\right)}{2}\right) \mathrm{d}x = \int_{-2}^{2} 0 \,\mathrm{d}x = 0$$

הערה

אם היה רשום חשבו את השטח היינו בוחרים

$$0 \le y \le \sqrt{1+x^2}$$

$$-2 \le x \le 2$$

וכופלים את התוצאה ב2.

דוגמה 4

הפכו את סדר האינטגרציה באינטגרל

$$\int_0^4 \mathrm{d}x \int_{3x^2}^{12x} f\left(x,y\right) \,\mathrm{d}y$$

פתרון

בשביל להפוך סדר אינטגרציה צריך שy יהיה קבוע ולכן נציב א תהxים בין "0" ל"4":

$$0 \leq y \leq 48$$

מהמשוואה

$$3x^2 \leq y \leq 12x$$

$$\Downarrow$$

$$3x^2 \leq y \wedge y \leq 12x$$

$$\Updownarrow$$

$$x^2 \leq \frac{y}{3} \wedge x \geq \frac{y}{12}$$

$$\Downarrow$$

$$x \leq \sqrt{\frac{y}{3}} \wedge x \geq \frac{y}{12}$$

ולכן $\int_0^{48} \int_{\frac{y}{12}}^{\sqrt{\frac{3}{y}}} f\left(x,y\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ זוהי ההחלפה הדרושה

דוגמה 5

הפכו סדר אינטגרציה

$$I = \int_0^2 \,\mathrm{d}x \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x}} f\left(x,y\right)\,\mathrm{d}y$$

פתרון

כדי לצייר את התחום נבדוק את הגרפים של הפונקציות הרלוונטיות
יש שתי פונקציות:

- $y = \sqrt{2x}$
- $y = \sqrt{2x - x^2} \Leftarrow y = \sqrt{-\left(x^2 - 2x + 1 - 1\right)}$

$$y = \sqrt{-\left(x-1\right)^2 + 1}$$

$$y^2 + \left(x-1\right)^2 = 1$$

זהו מעגל שרדיוסו 1 ומרכזו $(1,0)$.

- נמצא נקודות חיתוך:

$$\sqrt{2x} = \sqrt{2x - x^2}$$

$$2x = 2x - x^2$$

$$x = 0$$

חייבים לחלק לתחומים כי הx לא חסום בין שני yים. לכן נחשב את האינטגרל בנפרד בשלושת התחומים

תחום א׳ $0 \le y \le 1$. אם $y = \sqrt{x} \Leftarrow x = \sqrt{1-y^2}+1$ ולכן התחום המבוקש הוא
$$0 \le y \le 1 \qquad \frac{y^2}{2} \le x \le \sqrt{1-y^2}+1$$

תחום ב׳ $0 < y \le 1$ ו$\sqrt{1-y^2}+1 \le x \le 2$

תחום ג׳ $1 \le y \le 2$, $\frac{y^2}{2}$ $\frac{y^2}{2} \le x \le 2$

ולכן הפתרון הוא דרוש סכום התחומים!!