פתרון תרגיל בית 9 במבנים אלגבריים
89-214 סמסטר א' תשע"ו

הוראות בהגשת הפתרון יש לרשום בכל דף שם מלא, מספר ת"ז ומספר קבוצת תרגול.
תאריך הגשת התרגיל הוא לתרגול בשבוע המתחיל בתאריך כ"ב טבת ה'תשע"ו, 3.1.16.

שאלה 1. בכל סעיף נתונה חבורה G ותת-חבורה $H \le G$. הוכיחו כי $H \lhd G$ וחשבו את G/H על ידי משפט האיזומורפיזם הראשון:

א. $G = D_6$, $H = \langle \sigma^2, \tau \rangle$.

ב. $G = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}$, $H = (2\mathbb{Z}_4) \times (3\mathbb{Z})$.

פתרון.

א. מוטיבציה: פה רואים ש-$[G:H] = 2$, ולכן $H \lhd G$. לכן G/H היא חבורה מסדר 2, כלומר $\mathbb{Z}_2$. לכן נרצה לחפש $f: G \to \mathbb{Z}_2$ שעבורה $\ker f = H$.
נגדיר $f: D_6 \to \mathbb{Z}_2$ לפי

$$f\left(\tau^i \sigma^j\right) = j \pmod 2$$

נוודא ש-f מוגדרת היטב: אם $\tau^i\sigma^j = \tau^k\sigma^\ell$, אז בהכרח $j \equiv \ell \pmod 6$, ובפרט $j \equiv \ell \pmod 2$. לכן $f\left(\tau^i\sigma^j\right) = f\left(\tau^k\sigma^\ell\right)$.
נוכיח ש-f הומומורפיזם: יהיו $\tau^i\sigma^j, \tau^k\sigma^\ell \in D_6$. מהיחסים של D_6 קל לראות כי $\sigma^j\tau^k = \tau^k\sigma^{-j}$. לכן

$$\begin{aligned} f\left(\tau^i\sigma^j\tau^k\sigma^\ell\right) &= f\left(\tau^i\tau^k\sigma^{-j}\sigma^\ell\right) = f\left(\tau^{i+k}\sigma^{\ell-j}\right) = \ell - j \pmod 2 = \\ &= \ell + j \pmod 2 = f\left(\tau^i\sigma^j\right) + f\left(\tau^k\sigma^\ell\right) \end{aligned}$$

כלומר f הומומורפיזם.
נוכיח ש-f אפימורפיזם: $f(\mathrm{id}) = 0$ ו-$f(\sigma) = 1$, ולכן f על.
נחשב את $\ker f$:

$$\ker f = \left\{\tau^i\sigma^j \in D_6 \middle| f\left(\tau^i\sigma^j\right) = 0\right\} = \left\{\tau^i\sigma^j \in D_6 \middle| j \equiv 0 \pmod 2\right\} = \langle \sigma^2, \tau \rangle = H$$

לכן, לפי משפט האיזומורפיזם הראשון,

$$D_6/\langle \sigma^2, \tau \rangle \cong \mathbb{Z}_2$$

ב. מוטיבציה: אנחנו מכירים את המנות הבאות: $\mathbb{Z}_4/2\mathbb{Z}_4 \cong \mathbb{Z}_2$ ו-$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_3$. אז ננחש ש-$G/H \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$. כלומר, רוצים להגדיר $f: G \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ שעבורה $\ker f = H$.
נגדיר $f: \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ לפי

$$f(m,n) = (m \pmod 2, n \pmod 3)$$

צריך לוודא שוב ש-f מוגדרת היטב: אם ניקח $(m,n)=(m',n)$, כלומר $m\equiv m' \pmod 4$, אזי גם $m\equiv m' \pmod 2$, ולכן

$$f(m,n)=(m \pmod 2, n \pmod 3)=(m' \pmod 2, n \pmod 3)=f(m',n)$$

מכאן ש-f מוגדרת היטב.
נראה ש-f הומומורפיזם: יהיו $(m_1,n_1),(m_2,n_2)\in\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}$. אזי

$$\begin{aligned} f((m_1,n_1)+(m_2,n_2)) &= f(m_1+m_2,n_1+n_2)= \\ &= (m_1+m_2 \pmod 2, n_1+n_2 \pmod 3)= \\ &= (m_1 \pmod 2, n_1 \pmod 3)+(m_2 \pmod 2, n_2 \pmod 3)= \\ &= f(m_1,n_1)+f(m_2,n_2) \end{aligned}$$

נראה ש-f על: אם $(m,n)\in\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_3$, נבחר נציג של m ושל n, ואז $f(m,n)=(m,n)$ (כאשר בצד שמאל משתמשים בנציגים).
נחשב את $\ker f$:

$$\begin{aligned} \ker f &= \{(m,n)\in\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z} \mid f(m,n)=(0,0)\}= \\ &= \{(m,n)\in\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z} \mid (m \pmod 2, n \pmod 3)=(0,0)\}= \\ &= (2\mathbb{Z}_4)\times(3\mathbb{Z})=H \end{aligned}$$

לכן, לפי משפט האיזומורפיזם הראשון,

$$\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}/(2\mathbb{Z}_4)\times(3\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_3$$

(וזה גם איזומורפי ל-$\mathbb{Z}_6$).

נצטט את משפטי האיזומורפיזם השני והשלישי, ואז נוכיח אותם (לא לדאוג – יש הדרכה).

משפט (משפט האיזומורפיזם השני). תהי G חבורה, תהי $H\le G$ תת-חבורה, ותהי $N\lhd G$ תת-חבורה נורמלית. אזי $H\cap N\lhd H$, $N\lhd HN$, וכן

$$HN/N\cong H/H\cap N$$

משפט (משפט האיזומורפיזם השלישי). תהי G חבורה, ותהיינה $H,K\lhd G$ תת-חבורות נורמליות של G כך ש-$K\subseteq H$. אזי

$$G/K\big/H/K\cong G/H$$

שאלה 2. הוכיחו את משפט האיזומורפיזם השני: יהיו G, H ו-N כמו בניסוח המשפט. נגדיר $f:H\to HN/N$ לפי $f(h)=hN$.

א. הראו ש-f הומומורפיזם.

ב. הראו ש-f על.

ג. הוכיחו כי $\ker f=H\cap N$.

ד. הסיקו את הדרוש לפי משפט האיזומורפיזם הראשון.

הוכחה.

א. יהיו $h_1,h_2\in H$. אזי

$$f(h_1h_2)=h_1h_2N=(h_1N)(h_2N)=f(h_1)f(h_2)$$

ולכן f הומומורפיזם.

ב. תהי מחלקה $hnN \in {}^{HN}/_{N}$ עבור $h \in H$ ו-$n \in N$. נשים לב כי $hnN = hN$, ולכן

$$f\left(h\right) = hN = hnN$$

ומכאן ש-f על.

ג. נחשב את $\ker f$:

$$\ker f = \left\{h \in H \middle| f\left(h\right) = e_{HN/N}\right\} = \left\{h \in H | hN = N\right\} = H \cap N$$

ד. לפי משפט האיזומורפיזם הראשון,

$${}^{H}/_{H\cap N} \cong {}^{HN}/_{N}$$

$\square$

שאלה 3. הוכיחו את משפט האיזומורפיזם השלישי: יהיו G, H ו-K כמו בניסוח המשפט. נגדיר ${}^{G}/_{K} \to {}^{G}/_{H}$: f לפי $f\left(gK\right) = gH$.

א. הוכיחו ש-f מוגדרת היטב. כלומר, אם $g_1K = g_2K$, אזי $f\left(g_1K\right) = f\left(g_2K\right)$.

ב. הראו ש-f הומומורפיזם.

ג. הראו ש-f על.

ד. הוכיחו כי $\ker f = {}^{H}/_{K}$.

ה. הסיקו את הדרוש לפי משפט האיזומורפיזם הראשון.

הוכחה.

א. נניח ש-$g_1K = g_2K$. לכן $g_1g_2^{-1} \in K$. אבל $K \subseteq H$, כלומר $g_1g_2^{-1} \in H$, ולכן $g_1H = g_2H$. מכאן $f\left(g_1K\right) = f\left(g_2K\right)$.

ב. יהיו $g_1K, g_2K \in {}^{G}/_{K}$. אזי

$$f\left(\left(g_1K\right)\left(g_2K\right)\right) = f\left(g_1g_2K\right) = g_1g_2H = \left(g_1H\right)\left(g_2H\right) = f\left(g_1K\right)f\left(g_2K\right)$$

ג. יהי $gH \in {}^{G}/_{H}$. לכן $f\left(gK\right) = gH$, ומכאן f על.

ד. נחשב את $\ker f$:

$$\ker f = \left\{gK \in {}^{G}/_{K} \middle| f\left(gK\right) = e_{G/H}\right\} = \left\{gK \in {}^{G}/_{K} | gH = H\right\} = \left\{gK \in {}^{G}/_{K} | g \in H\right\} = {}^{H}/_{K}$$

ה. לפי משפט האיזומורפיזם הראשון,

$${}^{G/K}/_{H/K} \cong {}^{G}/_{H}$$

$\square$

שאלה 4. נתונות התמורות הבאות בחבורה S_7: $\sigma = \left(1,3,4,7,2\right)$, $\tau = \left(1,4,2\right)$, $a = \left(1,3,2\right)\left(5,4,6,7\right)$. חשבו את:

א. $a\sigma a^{-1}$.

ב. $a\tau a^{-1}$.

פתרון. לפי הנוסחה להצמדות ב-S_7,

$$\begin{aligned} a\sigma a^{-1} &= (a(1), a(3), a(4), a(7), a(2)) = (3,2,6,5,1) \\ a\tau a^{-1} &= (a(1), a(4), a(2)) = (3,6,1) \end{aligned}$$

שאלה 5. נתונה התמורה $S_4 \ni (1,4,2)$.

א. מצאו את מחלקת הצמידות שלה ב-S_4.

ב. מצאו תמורה σ הצמודה ל-$(1,4,2)$ ב-S_4, אבל לא ב-A_4. הוכיחו את קביעתכם.

פתרון.

א. לפי טענה מהתרגול, שתי תמורות צמודות ב-S_n אם ורק אם יש להן אותו מבנה מחזורים. לכן, מחלקת הצמידות של תמורה מכילה את כל התמורות עם אותו מבנה מחזורים כמו של התמורה המקורית. מכאן שמחלקת הצמידות של התמורה הנתונה ב-S_4 היא

$$\{(1,2,3), (1,2,4), (1,3,2), (1,3,4), (1,4,2), (1,4,3), (2,3,4), (2,4,3)\}$$

ב. ניקח את $\sigma = (1,2,4)$. σ צמודה ל-$(1,4,2)$ ב-S_4, כי יש להן אותו מבנה מחזורים. כעת, נניח בשלילה שהן צמודות ב-A_4. לכן קיימת תמורה $\sigma \in A_4$ שעבורה

$$(\sigma(1), \sigma(4), \sigma(2)) = \sigma(1,4,2)\sigma^{-1} = (1,2,4)$$

מכאן בהכרח $\sigma(3) = 3$. התמורות היחידות ב-A_4 המקיימות $\sigma(3) = 3$ הן id, $(1,2,4)$ ו-$(1,4,2)$, ולכל σ מהרשימה הזו יתקיים

$$\sigma(1,4,2)\sigma^{-1} = (1,4,2)$$

בסתירה. לכן הן אינן צמודות ב-A_4.

שאלה 6. נסתכל על החבורה S_4. נגדיר $K_4 = \{\mathrm{id}, (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3)\}$. תת-חבורה זו נקראת **תת-חבורת קליין**.

א. הוכיחו כי $K_4 \lhd S_4$.

ב. מצאו סדרה של תת-חבורות $G_n = \{\mathrm{id}\} \lhd G_{n-1} \lhd \cdots \lhd G_1 \lhd G_0 = S_4$, כך שלכל i, $G_{i+1} \lhd G_i$, וגם לכל i המנה G_i/G_{i+1} היא חבורה ציקלית.
(**רמז:** היעזרו בסעיף הקודם ובתת-חבורה מוכרת).

פתרון.

א. קודם, צריך להוכיח ש-$K_4 \le S_4$. לפי הקריטריון המקוצר:

- $\mathrm{id} \in K_4$.
- תהיינה $\sigma, \tau \in K_4$. לכן $\sigma = \sigma^{-1}$ ו-$\tau = \tau^{-1}$. רוצים להוכיח כי $\sigma\tau^{-1} \in K_4$, ולכן שקול להוכיח $\sigma\tau \in K_4$. אם σ או τ הן id, זה ברור; גם אם $\sigma = \tau$, אז $\sigma\tau = \sigma^2 = \mathrm{id}$. לכן נניח ש-$\sigma, \tau \neq \mathrm{id}$ ו-$\tau \neq \sigma$, ונבדוק את כל האפשרויות:

$$\begin{aligned} (1,2)(3,4)(1,3)(2,4) &= (1,4)(2,3) \in K_4 \\ (1,3)(2,4)(1,2)(3,4) &= (1,4)(2,3) \in K_4 \\ (1,2)(3,4)(1,4)(2,3) &= (1,3)(2,4) \in K_4 \\ (1,4)(2,3)(1,2)(3,4) &= (1,3)(2,4) \in K_4 \\ (1,3)(2,4)(1,4)(2,3) &= (1,2)(3,4) \in K_4 \\ (1,4)(2,3)(1,3)(2,4) &= (1,2)(3,4) \in K_4 \end{aligned}$$

ולכן $\sigma\tau^{-1} = \sigma\tau \in K_4$.

כעת נראה $K_4 \lhd S_4$. תהיינה $\sigma \in S_4$, $\pi \in K_4$. צ"ל $\sigma\pi\sigma^{-1} \in K_4$. אם $\pi = \mathrm{id}$ זה ברור, אחרת $\sigma\pi\sigma^{-1}$ היא תמורה ממבנה מחזורים $(i,j)(k,\ell)$, ולכן היא ב-K_4, כדרוש.

ב. נזכור כי $A_4 \lhd S_4$ (כי היא תת-חבורה מאינדקס 2), וכעת הוכחנו $K_4 \lhd S_4$. בפרט $K_4 \lhd A_4$, וקיבלנו שרשרת

$$\{\mathrm{id}\} \lhd K_4 \lhd A_4 \lhd S_4$$

נחשב כל מנה: $A_4 \lhd S_4$ מאינדקס 2, ולכן $S_4/A_4 \cong \mathbb{Z}_2$ ציקלית.

$K_4 \lhd A_4$ והאינדקס הוא $[A_4 : K_4] = \frac{|A_4|}{|K_4|} = \frac{12}{4} = 3$, כלומר A_4/K_4 היא חבורה מסדר 3, כלומר היא ציקלית ואיזומורפית ל-$\mathbb{Z}_3$.

אבל $K_4 \cong K_4/\{\mathrm{id}\}$ היא אבלית שאינה ציקלית (כי אין שם איבר מסדר 4 – כל האיברים שאינם id הם מסדר 2). אז חסרה עוד תת-חבורה נורמלית. נעדן את השרשרת ונוסיף את

$$\{\mathrm{id}\} \lhd \langle (1,2)(3,4) \rangle \lhd K_4 \lhd A_4 \lhd S_4$$

תת-החבורה $H = \langle (1,2)(3,4) \rangle$ היא תת-חבורה מסדר 2, כי $|H| = o((1,2)(3,4)) = 2$. מכאן $[K_4 : H] = 2$, כלומר $H \lhd K_4$, וכן $K_4/H \cong \mathbb{Z}_2$ ציקלית. כמו כן, $H/\{e\} \cong H \cong \mathbb{Z}_2$ גם היא ציקלית. לכן השרשרת האחרונה שקיבלנו מתאימה לתנאי השאלה.

שאלה 7. הוכיחו כי $S_n = \langle (1,2), (1,2,\ldots,n) \rangle$ בצעדים הבאים: ראשית, היזכרו כי S_n נוצרת על ידי החילופים, כלומר

$$S_n = \langle \{(i,j) | 1 \le i,j \le n, i \ne j\} \rangle$$

א. הראו כי כל חילוף (i,j) אפשר להציג כמכפלת חילופים מהצורה $(1,k)$, והסיקו כי

$$S_n = \langle (1,2), (1,3), \ldots, (1,n) \rangle$$

ב. הראו כי כל חילוף מהצורה $(1,k)$ אפשר להציג כמכפלת חילופים מהצורה $(m, m+1)$, והסיקו כי

$$S_n = \langle (1,2), (2,3), \ldots, (n-1,n) \rangle$$

ג. הראו כי $S_n = \langle (1,2), (1,2,\ldots,n) \rangle$ על ידי נוסחת ההצמדה ב-S_n.

ד. (אתגר) הראו כי אם σ הוא מחזור מאורך n כלשהו, ואם τ חילוף כלשהו, אזי מתקיים $S_n = \langle \tau, \sigma \rangle$. זו למעשה הכללה של השאלה, המראה כי יכולנו לבחור כל מחזור מאורך n וכל חילוף, ולא רק את אלו הנתונים.

הוכחה. ראשית, כפי שראינו בתרגול, S_n נוצרת על ידי החילופים, כלומר כל תמורה אפשר להציג כמכפלה של חילופים (לא בהכרח זרים!).

א. נרצה להראות כי כל חילוף (i,j) אפשר להציג כמכפלה של חילופים מהצורה $(1,k)$. לצורך כך, ניעזר בנוסחת ההצמדה. מתקיים

$$(i,j) = (1,i)(1,j)(1,i)$$

לכן

$$S_n = \langle (1,2), (1,3), \ldots, (1,n) \rangle$$

נסביר זאת: כל תמורה אפשר להציג כמכפלה של חילופים, וכל חילוף אפשר להציג כמכפלה של חילופים מהצורה $(1,k)$. לכן אפשר לפרק כל תמורה למכפלה של חילופים מהצורה $(1,k)$.

ב. נרצה להראות שכל חילוף מהצורה $(1,k)$ אפשר להציג כמכפלה של חילופים מהצורה $(m,m+1)$. שוב, לפי נוסחת ההצמדה,

$$(1,k)=(1,2)\dots(k-2,k-1)(k-1,k)(k-2,k-1)\dots(1,2)$$

הסבר: בשלב הראשון,

$$(k-2,k-1)(k-1,k)(k-2,k-1)=(k-2,k)$$

אחר כך,

$$(k-3,k-2)(k-2,k-1)(k-1,k)(k-2,k-1)(k-3,k-2)=(k-3,k)$$

כך ממשיכים עד שמגיעים ל-$(1,k)$.
הראינו שכל תמורה ב-S_n אפשר להציג כמכפלה של חילופים מהצורה $(1,k)$, ושכל חילוף מהצורה $(1,k)$ אפשר להציג כמכפלה של חילופים מהצורה $(m,m+1)$. לכן, כל תמורה ב-S_n אפשר להציג כמכפלה של חילופים מהצורה $(m,m+1)$. מכאן

$$S_n=\langle(1,2),(2,3),\dots,(n-1,n)\rangle$$

ג. צריך להראות שכל תמורה מהצורה $(m,m+1)$ אפשר לכתוב כמכפלה של התמורות $(1,2)$ ו-$(1,2,\dots,n)$. נשים לב כי לפי נוסחת ההצמדה ב-S_n

$$\begin{aligned}(1,2,\dots,n)(1,2)(1,2,\dots,n)^{-1}&=(2,3)\\(1,2,\dots,n)^{2}(1,2)(1,2,\dots,n)^{-2}&=(3,4)\end{aligned}$$

וכן הלאה. באופן כללי,

$$(1,2,\dots,n)^{m}(1,2)(1,2,\dots,n)^{-m}=(m+1,m+2)$$

לכן כל תמורה מהצורה $(m,m+1)$ אפשר לכתוב כמכפלה של התמורות $(1,2)$ ו-$(1,2,\dots,n)$. בסך הכל נקבל

$$S_n=\langle(1,2),(1,2,\dots,n)\rangle$$

$\square$

בהצלחה!