(3

ניקח את B להיות משולשית תחתונה ונמצא

$$B^tB=\begin{pmatrix} a & b & c \\ & d & e \\ & & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & & \\ b & d & \\ c & e & f \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a^2+b^2+c^2=1 \Rightarrow a=b=0 \\ bd+ce=-2 \\ cf=2 \Rightarrow c=1 \\ d^2+e^2=4 \Rightarrow d=0 \\ ef=-4 \Rightarrow e=-2 \\ f^2=4 \Rightarrow f=2 \end{cases}$$

לכן:

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

ואכן:

$$B^tB=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}=A$$

4)

לכסינה $A \Rightarrow \exists P$ הפיכה D אלכסונית $: \ A = PDP^{-1}$

$$\Rightarrow f_A(x) = |A - xI| = |P|\,|D - xI|\,|P|^{-1} = f_D(x)$$

$$\Rightarrow \forall x \quad f_A(x) = f_D(x)$$

נסמן:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

אז

$$f_D(x) = (x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_n)$$

$$f_A(A) = f_D(A) = (A-\lambda_1 I)\cdots(A-\lambda_n I)$$

$$= P(D-\lambda_1 I)\cancel{P^{-1}}\cdots\cancel{P}(D-\lambda_n I)P^{-1}$$

כאשר $D-\lambda_i I \quad \forall i$ היא מטריצה אלכסונית עם 0 במקום ה-i.

$\prod(D-\lambda_i I)$ זה מט' אלכסוני —

כאשר כל $(D-\lambda_i I)$ יאפס את המקום ה-ii

כמכפלה, מכאן:

$$\varphi_A(A) = \varphi_D(A) = P\left(\prod D-\lambda_i I\right)P^{-1} = P\cdot O\, P^{-1} = 0$$

③ $A,B\in\mathbb{R}^{3\times 3}$

$$AB\,\mathrm{adj}\,BA = I$$

$\Downarrow$

AB הפיכה, אחרת

$$|AB\,\mathrm{adj}\,BA| = |AB||\mathrm{adj}\,BA| = 0 \neq |I|$$

$\Downarrow$

BA הפיכה, אחרת $\Longrightarrow$ (גם $\mathrm{adj}(BA)$ הפיכה ⊛)

$$0 = |BA| = |B||A| = |A||B| = |AB|$$

סתירה!

מכאן:

$$AB(BA)^{-1} \overset{\frac{\mathrm{adj}(BA)}{|BA|}}{=} |BA|^{-1}\underbrace{AB\cdot \mathrm{adj}(BA)}_{I} = |BA|^{-1} I$$

ונקבל:

$$|AB(BA)^{-1}| = |A||B||A|^{-1}|B|^{-1} = 1$$

$$\left||BA|^{-1} I\right| \overset{n}{=} \left|\begin{pmatrix} |BA^{-1}| & & \\ & |BA^{-1}| & \\ & & |BA^{-1}| \end{pmatrix}\right| = |BA|^{-3}$$

$$|BA|^{-3} = 1 \Rightarrow 1 = |BA|^3 = |AB|^3$$

$$A,B\in\mathbb{R} \Rightarrow |AB|\in\mathbb{R}$$

$\Downarrow$

$$\boxed{|AB| = 1}$$

כתוצאה מכך:

$$|BA|\,AB\,\mathrm{adj}(BA) = |BA|\,I = BA\,\mathrm{adj}(BA)$$

⊛ [illegible] $AB\,\mathrm{adj}\,BA = I$; [illegible]

$$\boxed{AB = BA}$$

6

$$A=\begin{pmatrix}\langle v_1,v_1\rangle & \cdots & \langle v_1,v_n\rangle\\ \vdots & \ddots & \\ \langle v_n,v_1\rangle & \cdots & \langle v_n,v_n\rangle\end{pmatrix}$$

$$\underset{\text{ת"ל}}{\{v_1,\dots,v_n\}} \iff \exists j:\quad v_j=\sum_{k\neq j}\alpha_k v_k \iff$$

$$\forall i\neq j\quad \langle v_j,v_i\rangle = \langle \textstyle\sum \alpha_k v_k, v_i\rangle = \sum\alpha_k\langle v_k,v_i\rangle$$

$$\iff A=\begin{array}{r}\\ \\ \text{שורה } j\rightarrow \\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix}\langle v_1,v_1\rangle & \cdots & \langle v_1,v_n\rangle\\ & \vdots & \\ \sum\alpha_k\langle v_k,v_1\rangle & \cdots & \sum\alpha_k\langle v_k,v_n\rangle\\ & \vdots & \\ \langle v_n,v_1\rangle & \cdots & \langle v_n,v_n\rangle\end{pmatrix} \iff$$

השורה ה-j ת"ל בשורות האחרות

$\Updownarrow$

$|A|=0$

ט) א. הפרכה:

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ & 0\end{pmatrix}$$

$$f_A(x)=x^2 \Rightarrow x_{1,2}=0\in\mathbb{R}$$

$$A^*=\begin{pmatrix}0 & \\ 1 & 0\end{pmatrix}\neq A$$

ב. הוכחה: מאחר ש- $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ $\Leftarrow$ f_A מתפ"ל

נורמלית — $A \Leftarrow A^*A=(A^2+I)A=A^3+I=A(A^2+I)=AA^*$

$\Leftarrow A$ נורמלית. מעל $\mathbb{C}^n$ ממ"פ $\Leftarrow A$

מייצגת ה"ל מעל ממ"פ $\Leftarrow$ ניתן לנרמל

ב-e של הבסיס המלכסן ולקבל בסיס

א"נ מלכסן $\Leftarrow$ אלכסוני $= P^{-1}AP$: $\exists P$

$$\Leftarrow \boxed{U=P^{-1}}$$

② T איז' $\Leftarrow$ הוכחה:

$$\|T(v)\|=\|v\|$$

$$\|T(v)+v\|=\|T(v)\|+\|v\|=2\|v\|$$

$$\Downarrow$$

$$\|T(v)+v\|^2=4\|v\|^2$$

$$\Downarrow$$

$$\|T(v)+v\|^2=\|T(v)\|^2+2\operatorname{Re}\langle T(v),v\rangle+\|v\|^2=4\|v\|^2=2\|Tv\|^2+2\|v\|^2$$

$$\Downarrow$$

$$0=\|T(v)\|^2-2\operatorname{Re}\langle T(v),v\rangle+\|v\|^2=\|T(v)-v\|\Rightarrow T(v)-v=0$$

ולכן $T(v)=v$.