שיעורי בית 6

מועד ההגשה הוא לשבועיים

17 בדצמבר 2011

1 הומומורפיזמים

1. יהי $\phi : G \longrightarrow H$ הומומורפיזם של חבורות.
הוכח כי $\phi(x^n) = \phi(x)^n \ \forall n \in \mathbb{Z}$

2. אם $\phi : G \longrightarrow H$ הוא איזומורפיזם של חבורות הוכח כי $\forall x \in G \ |\phi(x)| = |x|$.
הסק מכך כי בכל שתי חבורות איזומורפיות ישנו אותו מספר איברים מסדר $n \in \mathbb{Z}^+$. האם טענה זו נכונה עבור ϕ הומומורפיזם ?

3. אם $\phi : G \longrightarrow H$ הוא איזומורפיזם של חבורות הוכח כי G אבלית אמ"ם H אבלית. איזה תנאי נוסף (אם בכלל) צריך במידה ומדובר בהומומורפיזם ?

4. בכל זוג קבע האם החבורות הבאות איזומורפיות: (הוכח את קביעתך !)

    א. $\mathbb{R}^*$ ו $\mathbb{C}^*$ (עם כפל)

    ב. החבורות החיבוריות $\mathbb{R}$ ו $\mathbb{Q}$

    ג. החבורות החיבוריות $\mathbb{Z}$ ו $\mathbb{Q}$

    ד. יהיו B,A חבורות כלשהן. $A \times B$ ו $B \times A$.

    ה. S_n ו S_m עבור $n \neq m$

5. הוכח כי ההעתקה של $\phi : G \longrightarrow G$ המוגדרת על ידי $g \to g^{-1}$ היא הומומורפיזם אמ"ם G אבלית. הוכח את הטענה הזהה עבור $g \to g^2$. (הטענה אינה נכונה עבור חזקות אחרות, אין צורך להוכיח)

2 קבוצת מנה וחבורות נורמליות

1. תהי $D_{2n} = \langle r, s | r^n = s^2 = 1, rs = sr^{-1} \rangle$ תהייה ההצגה הרגילה של החבורה הדיאדרלית מסדר $2n$ ויהי k מספר חיובי המחלק את n. הוכח כי $\langle r^k \rangle$ היא תת חבורה נורמלית של D_{2n} וכי $D_{2n}/\langle r^k \rangle \cong D_{2k}$ (מומלץ להשתמש במשפט האיזומורפיזם הראשון אך כל הוכחה תתקבל).

2.נתבונן בחבורת המנה החיבורית $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

א. הוכח כי כל קוסט של $\mathbb{Z}$ בתוך $\mathbb{Q}$ מכיל נציג יחיד $q \in \mathbb{Q}$ $0 \leq q < 1$.

ב. הראה כי כל איבר של $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ הוא מסדר סופי אבל יש איבר מכל סדר שהוא.

ג. הראה כי $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ היא תת חבורת הפיתול של $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. (תת חבורת הפיתול היא אוסף כל האיברים מסדר סופי $\{g \in G | |g| < \infty\}$)

(*)ד. הוכח כי $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ היא איזומורפית לחבורה הכפלית של כל שורשי היחידה ב-$\mathbb{C}^*$.

(*)3.(חשוב, כלי חזק) הוכח כי אם $G/Z(G)$ ציקלית אזיי G אבלית.

3 משפט קושי - הוכחה מודרכת

משפט לגרנז' נותן לנו תנאי הכרחי לקיום תת חבורה מגודל מסויים אך אינו מבטיח כי אכן קיימת כזו (במקרים מסויימים אין לנו תת חבורה מגודל שמחלק את גודל החבורה). משפט קושי מבטיח לנו את הקיום של תת חבורה במקרים מסויימים.

משפט חשוב: תהי G חבורה סופית $|G| = n$ ויהי ראשוני p אשר מחלק את n אזיי קיים ב־G איבר מסדר p. ההוכחה שנסקור ביחד נתנה על ידי James McKay ב־ 1959. הוכחה זו יפה באלגנטיות שלה ובזה שהיא משתמשת ב"טריק" במקום חישובים מפרכים. נתחיל !

נסתכל על $S = \{(x_1, ..., x_p) | x_i \in G \text{ and } x_1 x_2 ... x_p = 1_G\}$.

א. הראה כי $|S| = |G|^{p-1}$ לכן הגודל שלו מתחלק ב־p.
נגדיר את היחס $\sim$ על S על ידי $a \sim b$ אמ"ם b היא שיפט ציקלי של a.
ב. הראה כי הזזה ציקלי של איבר מ־S עדיין איבר מ־S.
ג. בדוק כי $\sim$ הוא אכן יחס שקילות.
ד. הוכח כי מחלקת שקילות מכילה איבר אחד אמ"ם היא מהצורה של $(x, ..., x)$ גורר $x^p = 1$.
ה. הראה כי כל מחלקת שקילות היא מגודל p או 1 (השתמש כאן בעובדה ש־p ראשוני).
הסק כי $|G|^{p-1} = k + pd$. כאשר k הוא מספר מחלקות השקילות מגודל 1.

ו. הסק מן הסעיפים הקודמים ומן העובדה ש־ $\{(1, ..., 1)\}$ היא מחלקת שקילות מגודל 1, כי חייב להיות איבר אחר $x \in G$ עם $x^p = 1$ [הראה כי k|p וכי p>1.]

הערה לסיכום: מעבר לעשיית שיעורי הבית חשוב שתוודאו שאתם מבינים וזוכרים את התנאים שאיזומורפיזם משמר בעיקר שאלות 1־3 שבאות לתאר את התכונות הנשמרות ותרגיל 4 שבו השתמשתם בהן. בנוסף תרגיל 3 ומשפט קושי הם משפטים שמשתמשים בהם וכלים חזקים מאוד בהוכחות. לכן גם מי שלא הצליח להוכיח אותן מומלץ להבין ולזכור את התוצאה