אינפי 3

תרגול 11+12

תזכורת:

כאשר נרצה להחליף משתנים באינטגרציה, נכפיל את הפונקציה בערך המוחלט של היעקוביאן:

$$\int_A f(x)dx = \int_{g^{-1}(A)} f(g(t))|J(t)|dt$$

החלפות המשתנים הנפוצות:

- קואורדינטות קוטביות/פולריות:

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta$$

כאשר: $(r,\theta) \in [0,\infty) \times [0,2\pi)$.

והיעקוביאן שווה ל-r

החלפות המשתנים הנפוצות:

- קואורדינטות גליליות:

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta \qquad z = z$$

כאשר $(r,\theta,z) \in [0,\infty) \times [0,2\pi) \times \mathbb{R}$.

היעקוביאן שווה ל-r

החלפות המשתנים הנפוצות:

- קואורדינטות כדוריות:

$$x = r\sin\theta\cos\phi \quad y = r\sin\theta\sin\phi \quad z = r\cos\theta$$

כאשר: $(r,\theta,\phi) \in [0,\infty) \times [0,\pi] \times [0,2\pi)$.

היעקוביאן במקרה זה הוא $|J| = r^2\sin\theta$.

__תרגיל:__

חשבו את האינטגרל:

$$\int\int_D \sin(\sqrt{x^2+y^2})dxdy$$

כאשר:

$$D = \{x^2+y^2 \leq 1\}$$

פתרון:

די מתבקש לעבור לקואורדינטות קוטביות.

אם כן, התחום שלנו הוא:

$$D = \{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta \le 1\} = \{r \le 1\}$$

ובכל אופן $0 \le r$ ולכן $0 \le r \le 1$.

אם כן,

$$\iint_D = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sin(\sqrt{(r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2}) r d\theta dr$$

ה$-r$ נכנס שם כי זהו היעקוביאן. נחשב את האינטגרל:

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} r\sin r d\theta dr = 2\pi \int_0^1 r\sin r dr$$

ואחרי אינטגרציה בחלקים נקבל: $= 2\pi(sin1 - cos1)$

תרגיל:

חשבו את האינטגרל:

$$\iiint\limits_{D} (x+y+z)\,dxdydz$$

כאשר:

$$D = \{(x,y,z) | \sqrt{y^2+z^2} \leq x \leq \sqrt{4-y^2-z^2}\}$$

פתרון:

x לא משחק את המשחק של z,y עם חזקת 2 ולכן נראה שכדאי לעבור לקואורדינטות גליליות:

$$x = x \qquad y = r\cos\theta \qquad z = r\sin\theta$$

ואם כן התחום הוא:

$$r \le x \le \sqrt{4-r^2}$$

לגבי r עצמו נקבל מהתחום של x שמתקיים: $r \le \sqrt{4-r^2}$ ולכן $r \le \sqrt{2}$.

r תמיד אי שלילי ולכן סה"כ $0 \le r \le \sqrt{2}$.

θ נמצאת בין 0 לבין 2π. אם כן:

$$\iiint\limits_D = \int\limits_0^{\sqrt{2}} \int\limits_r^{\sqrt{4-r^2}} \int\limits_0^{2\pi} (x + r\cos\theta + r\sin\theta) \cdot r d\theta dx dr$$

r שצץ שם הוא היעקוביאן. נחשב את האינטגרל:

$$= \int\limits_0^{\sqrt{2}} \int\limits_r^{\sqrt{4-r^2}} (rx\theta + r\sin\theta - r\cos\theta)|_0^{2\pi} dx dr = 2\pi \int\limits_0^{\sqrt{2}} \int\limits_r^{\sqrt{4-r^2}} rx dx dr =$$

$$= \cdots = 2\pi$$

תרגיל:

חשבו את שטח האליפסה:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1$$

פתרון:

שטח של צורה גיאומטרית הוא האינטגרל של 1 על התחום.

כלומר, נחשב את:

$$\iint\limits_D 1dxdy$$

כאשר:

$$D = \{(x,y) | \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$$

נחליף למעין קואורדינטות קוטביות, תוך התחשבות בכך שלאליפסה מוקדים שונים:

$$y = br\sin\theta \qquad x = ar\cos\theta$$

היעקוביאן במקרה זה הוא $|J| = abr$.

במקרה שלנו, $r \in [0,1]$ ולכן סה"כ האינטגרל שלנו יהיה:

$$\iint\limits_D = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} abr d\theta dr = \pi ab$$

תרגיל:

חשבו את האינטגרל:

$$\iiint\limits_{D} x\,dx\,dy\,dz$$

כאשר:

$$D = \left\{ (x,y,z) \middle| \, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1, z \geq 0 \right\}$$

<u>פתרון:</u>

הפונקציה שלנו אי זוגית והתחום סימטרי ולכן האינטגרל הוא 0.

נראה זאת ע"י חישוב.

קודם כל, לשם הנוחות, נבצע החלפת משתנים:

$$x = au, y = bv, z = cw$$

היעקוביאן יהיה:

$$|J| = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc$$

לכן:

$$\iiint\limits_{D} = \iiint\limits_{D'} au \cdot (abc)\, dudvdw = a^2bc \iiint\limits_{D'} udu dv dw$$

כאשר:

$$D' = \left\{ (u,v,w) \middle| \, u^2+v^2+w^2 \le 1, w \ge 0 \right\}$$

כעת מאד מתבקש לעבור לקואורדינטות כדוריות:

$$u = r\sin\theta\cos\phi, v = r\sin\theta\sin\phi, w = r\cos\theta$$

מכיוון שאנו רוצים $w \geq 0$, $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

$r \in [0,1)$, $\phi \in [0,2\pi)$ ואם כן:

$$\iiint\limits_{D'} = a^2bc\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^1 (r\sin\theta\cos\phi)\left(r^2\sin\theta\right)drd\phi d\theta$$

כאשר $r^2\sin\theta$ הוא היעקוביאן שלנו.

כמו שאמרנו, לאחר שנחשב את האינטגרל נקבל 0.

תרגיל:

חשבו את האינטגרל:

$$\iiint\limits_{D} dxdydz$$

כאשר:

$$D = \{(x, y, z) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 - z^2\}$$

<u>פתרון:</u>

יש קצת התלבטות בין קואורדינטות גליליות לכדוריות.

אם נשתמש בגליליות:

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta \qquad z = z$$

נקבל שהתחום של r הוא :

$$1 \leq r \leq \sqrt{4-z^2}$$

מה שמכריח את z להיות בתחום $-\sqrt{3} \leq z \leq \sqrt{3}$ ואם כן האינטגרל שלנו הוא:

$$\iiint\limits_D dxdydz = \int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \int\limits_0^{\sqrt{4-z^2}} \int\limits_0^{2\pi} r d\theta dr dz$$

r שנכנס שם הוא היעקוביאן שלנו. נחשב את האינטגרל:

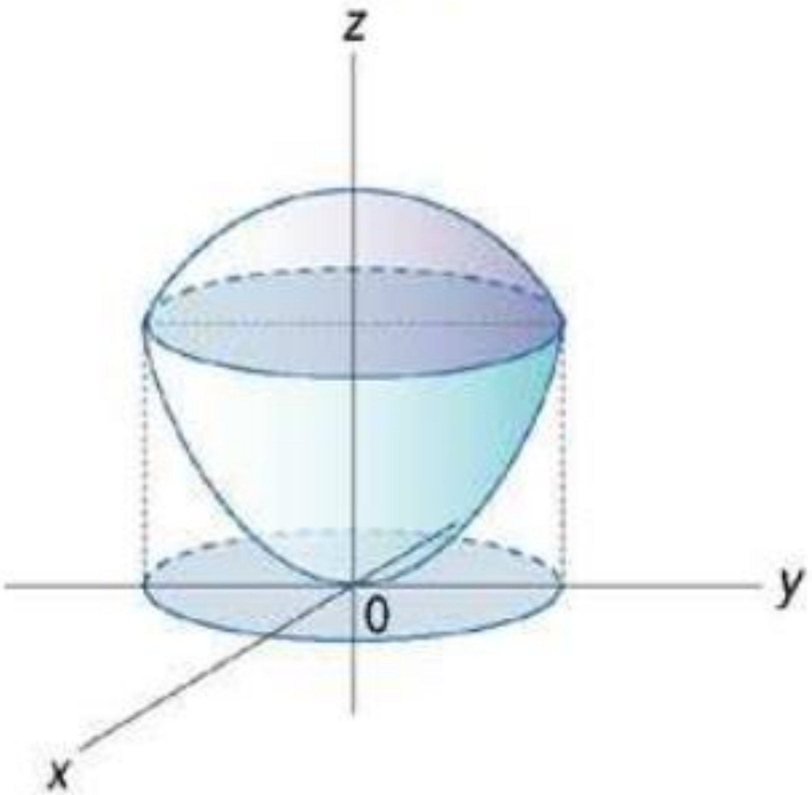
$$= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \int_{0}^{\sqrt{4-z^2}} 2\pi r dr dz = \pi \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} r^2 |_1^{\sqrt{4-z^2}} dz = \cdots = 4\sqrt{3}\pi$$

תרגיל:

חשבו את נפח הגוף הכלוא בין הספירה $x^2+y^2+z^2=6$ לבין הפרבולואיד $z=x^2+y^2$.

פתרון:

אנו מדברים על היצור הבא:



ננסה להבין מהו מעגל החיתוך (כדי שנוכל להטיל אותו על מישור xy).

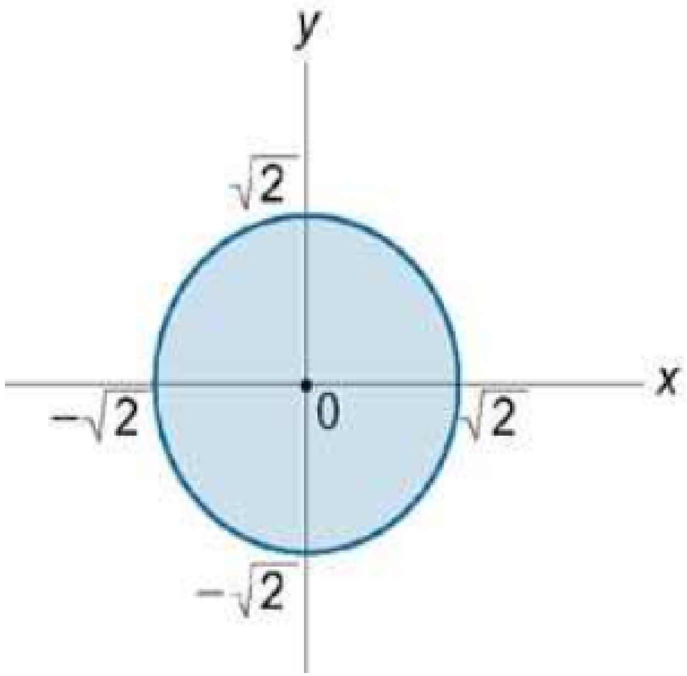
אם כן, החיתוך בין הפרבולואיד לספירה מתרחש כאשר:

$$z + z^2 = 6$$

כלומר $z=2, z=-3$. $z=-3$ כלל לא בתחום שלנו, ולכן $z=2$ הוא הפתרון.

הספירה נמצאת מעל הפרבולואיד, ולכן $x^2+y^2 \le z \le \sqrt{6-x^2-y^2}$.

אם נטיל המעגל על מישור xy נקבל:



כפי שאמרנו, $x^2+y^2=z=2$ ולכן זהו מעגל שרדיוסו $\sqrt{2}$.

לכן, אפשר לומר $0 \le y \le \sqrt{2-x^2}$, וגם $-\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}$.

z לא משחק את המשחק של x, y במעגל ולכן נעבור לקואורדינטות גליליות:

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, z = z$$

$x^2+y^2=r^2$ ולכן נקבל:

$$r^2 \le z \le \sqrt{6-r^2}, 0 \le r \le \sqrt{2}, 0 \le \theta \le 2\pi$$

היעקוביאן הוא r, ולכן:

$$V = \iiint\limits_D 1dxdydz = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}}\int_{r^2}^{\sqrt{6-r^2}} rdzdrd\theta = 2\pi\int_0^{\sqrt{2}} r\left(\sqrt{6-r^2}-r^2\right)dr = \frac{2\pi\left(6\sqrt{6}-11\right)}{3}$$

אינטגרלים לא אמיתיים

<u>הגדרה:</u> אינטגרל לא אמיתי הוא אינטגרל מהצורה:

$$\iint_D f\,ds$$

כך שהתחום D אינו חסום או שהפונקציה f אינה חסומה (אינה רציפה).

אפשר, כמובן, להכליל זאת למימדים גבוהים יותר.

איך מחשבים אינטגרל לא אמיתי?

ראשית, כאשר התחום D לא חסום, נתבונן בתחום: $D_R = D \cap B[0,R]$ לכל $R > 0$.

נגדיר:

$$\iint\limits_{D} f ds = \lim_{R \longrightarrow \infty} \iint\limits_{D_R} f ds$$

שנית, אם הפונקציה לא חסומה בתחום D, כלומר יש נקודת אי־רציפות בנקודה כלשהי a בתחום. נתבונן בתחום: $D_R = D \backslash B[a,R]$ לכל $R > 0$. נגדיר:

$$\iint\limits_{D} f ds = \lim_{R \longrightarrow 0} \iint\limits_{D_R} f ds$$

תרגיל:

חשבו את האינטגרל:

$$\iint\limits_D e^{-x^2-y^2}\,dxdy$$

כאשר D הוא הרביע הראשון.

פתרון:

לכל $R > 0$, נסמן:

$$D_R = D \cap \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < R^2\right\}$$

נחשב את האינטגרל על D_R:

$$\iint\limits_{D_R} e^{-x^2-y^2}dxdy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^R e^{-r^2}\cdot rdrd\theta$$

עברנו לקואורדינטות קוטביות: $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$ כי אנחנו ברביע הראשון.

את האינטגרל הזה קל לחשב:

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{-e^{-r^2}}{2}\right)\Bigg|_{r=0}^{r=R}d\theta = \frac{1}{2}\cdot\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-e^{-R^2}\right)d\theta = \frac{\pi\left(1-e^{-R^2}\right)}{4}$$

ולכן:

$$\iint\limits_D e^{-x^2-y^2}dxdy = \lim_{R\longrightarrow\infty}\iint\limits_{D_R} e^{-x^2-y^2}dxdy = \lim_{R\longrightarrow\infty}\frac{\pi\left(1-e^{-R^2}\right)}{4} = \frac{\pi}{4}$$

חישוב אינטגרלים חד-מימדיים באמצעות אינטגרלים רב-מימדיים

תרגיל:

חשבו את האינטגרל: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$.

פתרון:

נשתמש בתוצאה מתרגיל קודם. על הרביע הראשון,

$$\iint e^{-x^2-y^2}\,dxdy = \frac{\pi}{4}$$

הפונקציה זוגית ביחס לשני המשתנים ותמיד חיובית ולכן על כל המישור:

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}dxdy = 4 \cdot \frac{\pi}{4} = \pi$$

מצד שני,

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}dxdy = \lim_{R\longrightarrow\infty} \int\limits_{-R}^{R}\int\limits_{-R}^{R} e^{-x^2-y^2}dxdy$$

מצד שני,

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}dxdy = \lim_{R\longrightarrow\infty} \int\limits_{-R}^{R}\int\limits_{-R}^{R} e^{-x^2-y^2}dxdy$$

כלומר, אנו מכסים את המישור באמצעות ריבועים גדלים והולכים (שמרכזם בראשית ואורך צלעותיהם $2R$). נשתמש באינטגרל נשנה:

$$= \lim_{R \longrightarrow \infty} \int_{-R}^{R} e^{-x^2} dx \cdot \int_{-R}^{R} e^{-y^2} dy = \lim_{R \longrightarrow \infty} \left(\int_{-R}^{R} e^{-x^2} dx \right)^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2$$

כלומר:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

תרגיל:

חשבו את האינטגרל:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^3}$$

פתרון:

נסמן:

$$\varphi\left(y\right)=\int_0^1 \frac{dx}{x^2+y^2}$$

נגזור ונקבל:

$$\varphi'\left(y\right)=-\int_0^1 \frac{2ydx}{\left(x^2+y^2\right)^2}=-\frac{1}{y^2}\arctan\frac{1}{y}-\frac{1}{y\left(1+y^2\right)}$$

לכן:

$$-\int_0^1 \frac{dx}{\left(x^2+y^2\right)^2} = -\frac{1}{2y^3}\arctan\frac{1}{y} - \frac{1}{2y^2\left(1+y^2\right)}$$

נגזור שוב ואחרי צמצום נקבל:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\left(x^2+y^2\right)^3} = \frac{3}{8y^5}\arctan\frac{1}{y} + \frac{5y^2+3}{8y^4\left(1+y^2\right)^2}$$

נציב $y=a$ ונקבל את הפתרון.

תרגילים נוספים:

החליפו את סדר האינטגרציה של האינטגרל

$$\int_1^2 \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f\left(x,y\right) dydx.$$

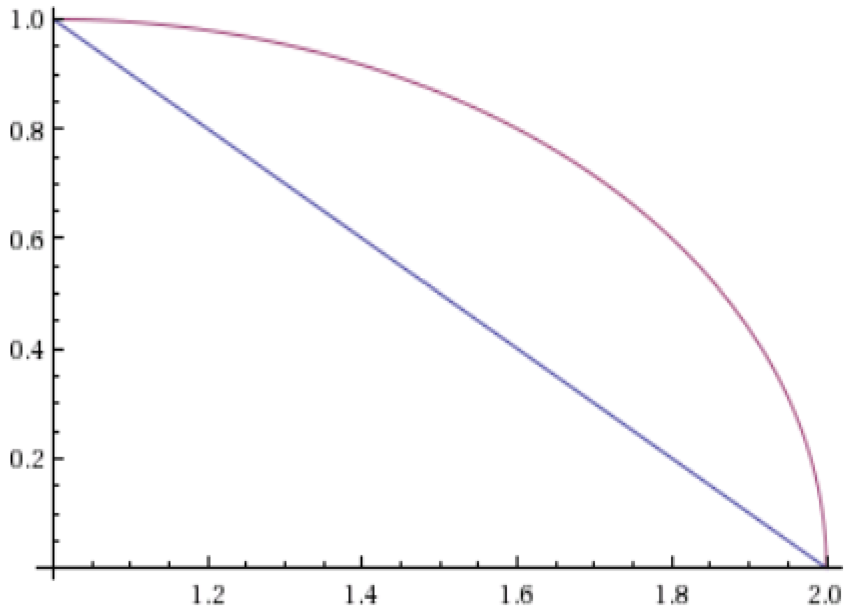
פתרון:

נחליף את סדר האינטגרציה.

(א) האינטגרל הוא:

$$\int_{1}^{2} \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\, dy dx$$

אם כן, התחום הוא:



כפי שראינו בעבר, $y=\sqrt{2x-x^2}$ נותן לנו $x=\pm\sqrt{1-y^2}+1$ בהתאם לתחום.

$y=2-x$ נותן $x=2-y$. אם נסובב את התחום שלנו, נקבל:

$$0\le y\le 1, 2-y\le x\le \sqrt{1-y^2}+1$$

ולכן:

$$\int\limits_{1}^{2}\int\limits_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f\left(x,y\right)dydx=\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{2-y}^{\sqrt{1-y^2}+1} f\left(x,y\right)dxdy$$

תרגיל:

G הפירמידה בתומן הראשון שפיאותיה הן מישורי הצירים והמישור $3x+6y+4z=12$. מצאו את הנפח של G.

פתרון:

נחשב את הנפח בעזרת אינטגרלים משולשים.

אם כן, בסיס הפירמידה נח על המישור: $3x+6y+4z=12$, ולכן נוכל לכתוב:

$$0 \le z \le \frac{12-3x-6y}{4} = 3 - \frac{3}{4}x - \frac{3}{2}y$$

כעת, ההטלה של הפירמידה על המישור xy תיתן את התחום:

$$0 \le x \le 4-2y, 0 \le y \le 2$$

החלטתי לגוון קצת ולהביע את x כפונקציה של y.

לפיכך, הנפח הוא:

$$V = \iiint\limits_G 1dxdydz = \int\limits_0^2 \left(\int\limits_0^{4-2y} \left(\int\limits_0^{3-\frac{3}{4}x-\frac{3}{2}y} 1dz \right) dx \right) dy = \int\limits_0^2 \left(\int\limits_0^{4-2y} \left(3 - \frac{3}{4}x - \frac{3}{2}y \right) dx \right) dy =$$

$$= \int\limits_0^2 \left(3x - \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{2}xy \right)_{x=0}^{x=4-2y} dy = \int\limits_0^2 \left(12 - 6y - \frac{48-48y+12y^2}{8} - \frac{12y-6y^2}{2} \right) dy =$$

$$= \left(12y - 3y^2 - 6y + 3y^2 - \frac{y^3}{2} - 3y^2 + y^3 \right)_{y=0}^{y=2} = 4$$

תרגיל:

חשבו את האינטגרל הבא באמצעות החלפת משתנים.
הסבירו מדוע הפונקציה שבחרתם אכן חח"ע.

$\iint_D \frac{x+3y}{x^4} e^{\frac{y}{x^3}}\, dxdy$ כאשר:

$.D = \{x^3 \leq y \leq 4x^3, \frac{1}{2} \leq x + y \leq 1\}$

פתרון:

החלפת המשתנים:

$$u = x + y, v = \frac{y}{x^3}$$

נראית קלאסית. למה זו פונקציה חח"ע?

התחום שלנו יהיה $1 \leq u \leq \frac{1}{2}, 4 \leq v \leq 1$. ל$-u, v$ כלשהם בתחום, x, y שיתאימו להם צריכים לקיים:

$$y = vx^3 \Longrightarrow u = x + vx^3$$

כמה x פותרים את המשוואה הזו? אם נגזור את $u = x + vx^3$ נקבל:

$$u' = 1 + 3vx^2 > 0$$

כלומר לפונקציה $u(x)$ אין נקודות קיצון (לא בקצוות; היא עולה ממש בכל התחום) ולכן היא חותכת את 0 רק במקום אחד, כלומר יש רק פתרון אחד למשוואה.

לכן לכל u יש רק x אחד מתאים. לכן, יש גם רק y אחד מתאים כי $u = x + y$.

נחשב את היעקוביאן:

$$\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{3y}{x^4} & \frac{1}{x^3} \end{vmatrix} = \frac{x+3y}{x^4}$$

ולכן: $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|^{-1} = \frac{x^4}{x+3y}$, לכן:

$$\iint\limits_D \frac{x+3y}{x^4} e^{\frac{y}{x^3}} dxdy = \int_1^4 \int_{\frac{1}{2}}^1 e^v du dv = \frac{1}{2}\int_1^4 e^v dv = \frac{e^4 - e}{2}$$

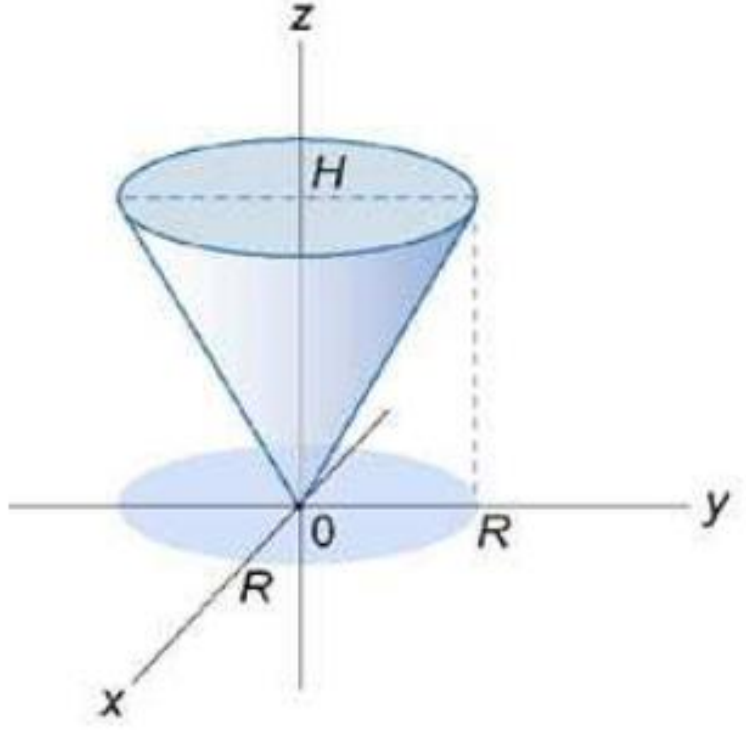
תרגיל:

מצאו את הנפח של חרוט שגובהו H ורדיוס הבסיס R

פתרון:

נחשב את הנפחים בעזרת אינטגרל משולש.

נשים את קודקודו של החרוט בראשית הצירים, כך:



אם כן, החרוט חסום בין המשטחים $z = \frac{H}{R}\sqrt{x^2+y^2}$, $z = H$.

אם נעבור לקואורדינטות גליליות, נקבל:

$$0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le r \le R \Longrightarrow \frac{Hr}{R} \le z \le H$$

היעקוביאן הוא r ולכן:

$$V = \iiint_D 1dxdydz = \int_0^R \int_r^H \int_0^{2\pi} rd\theta dzdr = 2\pi \cdot \int_0^R (z)\Big|_{z=\frac{Hr}{R}}^{z=H} rdr = 2\pi \cdot \int_0^R \left(Hr - \frac{Hr^2}{R}\right) dr$$

$$= 2\pi \cdot \left(\frac{Hr^2}{2} - \frac{Hr^3}{3R}\right)\Bigg|_{r=0}^{R} = 2\pi \cdot \left(\frac{HR^2}{2} - \frac{Hr^2}{3}\right) = \frac{\pi HR^2}{3}$$

תרגיל:

מצאו את הנפח של כדור עם רדיוס R

פתרון:

נסתכל רק על הגזרה בתומן הראשון, ונכפיל ב-8.

נעבור לקואורדינטות כדוריות; בתומן הראשון, $0 \le \theta, \phi \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le r \le R$,

היעקוביאן הוא $r^2 \sin\theta$ ולכן:

$$V = 8 \cdot \int_0^R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \sin\theta d\theta d\phi dr = 8 \cdot \int_0^R \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \left(-\cos\theta\right)\Big|_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} d\phi dr = 8 \cdot \int_0^R \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 d\phi dr$$

$$= \frac{8\pi}{2} \cdot \int_0^R r^2 dr = 4\pi \cdot \frac{r^3}{3}\Big|_{r=0}^{r=3} = \frac{4\pi R^3}{3}$$