תרגול 1־ דטרמיננטות

26 באפריל 2017

(הגדרה אחת מתוך כמה) דטרמיננטה היא פונקציה שמקבלת מטריצה ריבועית ומחזירה מספר המסמל את נפח המקבילון הנוצר על ידי ווקטורי העמודה.

1 פיתוח לפי מינורים

1.1 פיתוח לפי שורה

כדי לחשב את הדטרמיננטה נבחר שורה ספיציפית (i) ונפעל לפי הנוסחא הבאה

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |M_{ij}|$$

כאשר M_{ij} נקרא המינור ה־ij של Aוהוא מתקבל על ידי מחיקת שורה i והעמודה ה־j של A.

1.2 פיתוח לפי עמודה

כדי לחשב את הדטרמיננטה נבחר עמודה ספיציפית (j) ונפעל לפי הנוסחא הבאה

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |M_{ij}|$$

כאשר M_{ij} נקרא המינור ה־ij של Aוהוא מתקבל על ידי מחיקת שורה i והעמודה ה־j של A. נחשב את הדטרימננטה של המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

נפתח לפי העמודה הראשונה

$$\begin{aligned}
&= \left|\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}\right| \\
&= (-1)^{1+1}\,1\left|\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}\right| + (-1)^{2+1}\,4\left|\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}\right| + (-1)^{3+1}\,7\left|\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\right| \\
&= \left|\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}\right| - 4\left|\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}\right| + 7\left|\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\right| \\
&= \left|\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}\right| - 4\left|\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}\right| + 7\left|\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\right| \\
&= (5\cdot 9 - 6\cdot 8) - 4\,(2\cdot 9 - 3\cdot 8) + 7\,(2\cdot 6 - 3\cdot 5) \\
&= -3 - 4\,(-6) + 7\,(-3) \\
& 0
\end{aligned}$$

תכונות הדטרמיננטה.

1. $|AB| = |A|\,|B|$
2. $|A^t| = |A|$
3. $\left|A^{-1}\right| = |A|^{-1}$
4. לא מתקיים $|A+B| = |A| + |B|$!!
5. דטרמיננטה של מטריצה משולשית היא כפל איברי האלכסון.
6. מטריצה A הפיכה אם"ם $|A| \neq 0$

השפעות פעולות שורה על הדטרמיננטה:

1. המטריצה B מתקבלת על ידי ביצוע הפעולה $R_i \leftrightarrow R_j$ על המטריצה A אז $|B| = -|A|$
2. המטריצה B מתקבלת על ידי ביצוע הפעולה $R_i \leftrightarrow \alpha R_i$ על המטריצה A אז $|B| = \alpha\,|A|$
3. המטריצה B מתקבלת על ידי ביצוע הפעולה $R_i \leftrightarrow R_i + \alpha R_j$ על המטריצה A אז $|B| = |A|$

חשב את הדטרמיננטה של המטריצה $A = \begin{pmatrix} \sin^2\alpha & \sin^2\beta & \sin^2\gamma \\ \cos^2\alpha & \cos^2\beta & \cos^2\gamma \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ נבצע פעולות שורה על הדטרמיננטה כדי לפשט

$$\left|\begin{pmatrix} \sin^2\alpha & \sin^2\beta & \sin^2\gamma \\ \cos^2\alpha & \cos^2\beta & \cos^2\gamma \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right| \overset{R_2 \leftarrow R_2 + R_1}{=}$$

$$\left|\begin{pmatrix} \sin^2\alpha & \sin^2\beta & \sin^2\gamma \\ \cos^2\alpha + \sin^2\alpha & \cos^2\beta + \sin^2\beta & \cos^2\gamma + \sin^2\gamma \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right| \overset{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1}{=}$$

$$\left|\begin{pmatrix} \sin^2\alpha & \sin^2\beta & \sin^2\gamma \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right| \overset{R_3 \leftarrow R_3 - R_2}{=}$$

$$\left|\begin{pmatrix} \sin^2\alpha & \sin^2\beta & \sin^2\gamma \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right| =$$

$$0$$

2 דטרמיננטה של מטריצת בלוקים אלכסונית.

מטריצת בלוקים היא מטריצה שחולקה למספר חלקים שגם הם מטריצות. $= \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{array}\right) = A$

$\left(\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline D & E \end{array}\right)$ כאשר $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} D = \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 13 & 14 \end{pmatrix} E = \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 15 & 16 \end{pmatrix}$

תהיה A מטריצת בלוקים אלכסונית אז הדטרמיננטה שלה שווה למכפלת הדטרמיננטות של הבלוקים על האלכסון.

$$\left|\begin{array}{c|c|c|c} D_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & D_2 & \cdots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & D_n \end{array}\right| = |D_1|\,|D_2| \ldots |D_n|$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 9 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$