אינפי 1 – תרגיל 4

שאלה 1

עבור הסדרות הבאות, קבעו האם קיים גבול (גם במובן הרחב), ואם כן מצאו אותו והוכיחו שהוא אכן הגבול (בכל דרך שתבחרו):

א. $\frac{1}{n}\cdot\frac{1+\left(-1\right)^n}{\sqrt[n]{2}}$

פתרון:

$\frac{1}{n}\to 0$. נראה ש $\frac{1+\left(-1\right)^n}{\sqrt[n]{2}}$ חסומה ומכאן עפ"י משפט $\frac{1}{n}\cdot\frac{1+\left(-1\right)^n}{\sqrt[n]{2}}\to 0$.

לכל n מתקיים $0\le 1+\left(-1\right)^n\le 2$ וכן $1=\frac{1}{1}\ge\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\ge\frac{1}{2}$ ומכאן

$2=2\cdot\frac{1}{1}\ge\frac{1+\left(-1\right)^n}{\sqrt[n]{2}}\ge 0$ ולכן $\frac{1+\left(-1\right)^n}{\sqrt[n]{2}}$ אכן חסומה.

ב. $\frac{(n+1)!-n!}{(n+1)!+n!}$

פתרון:

$$\frac{(n+1)!-n!}{(n+1)!+n!}=\frac{n!(n+1-1)}{n!(n+1+1)}=\frac{n}{n+2}\to 1$$

ג. $\frac{3^{n-1}}{2^n}$

פתרון:

$\frac{3^{n-1}}{2^n}=\frac{1}{3}\frac{3^n}{2^n}=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^n\to\infty$ ($a^n\to\infty$ אם $a>1$, $a^n\to 0$ אם $a<1$)

ד. $\frac{3^n}{2^{\left(n^2\right)}}$

פתרון:

$n^2 \ge 2n$ עבור $2 \le n$. לכן פרט לאיבר הראשון

$$0 \le \frac{3^n}{2^{\left(n^2\right)}} < \frac{3^n}{2^{2n}} = \frac{3^n}{\left(2^2\right)^n} = \left(\frac{3}{4}\right)^n \to 0$$

ה. $\dfrac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^4}}$

פתרון:

$$\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^4}} \ge \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^3}} = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^3}} = \frac{n}{2} \to \infty \ .$$

עפ"י משפט נקבל ש $\dfrac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^4}} \to \infty$

ו. $\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{2^n}}$

פתרון:

$\frac{1}{n}, \frac{1}{2^n} \to 0$, לכן מאריתמטיקה של גבולות $\frac{1}{n}+\frac{1}{2^n} \to 0$. אם $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת אי שליליים המתכנסת ל L אזי $\sqrt{a_n}$ מתכנסת ל $\sqrt{L}$. מכאן

$$\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{2^n}} \to \sqrt{0} = 0$$

מש"ל

שאלה 2

חשבו את הגבול $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+1}-n$.

פתרון

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+1}-n = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)}{\sqrt{n^2+1}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} = 0 \ .$$

מש"ל

שאלה 3

הוכח/הפרך:

א. אם $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, אזי $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$

הוכחה: נניח $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, יהי $\varepsilon > 0$ לכן קיים n_0 כך שלכל $n > n_0$ מתקיים $|a_n - a| < \varepsilon$ ולפי אי השיוויון שלמדנו בשיעור הראשון, $\left||a_n| - |a|\right| \le |a_n - a| < \varepsilon$ ולכן $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$.

ב. אם $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$, אזי $\lim_{n\to\infty} a_n = a$

הפרכה: ייתכן של $\{a_n\}$ אין אפילו גבול. $1 = |(-1)^n| \to 1$ אבל ל $a_n = (-1)^n$ אין גבול.

ג. אם $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$ ו a_n מתכנסת, אזי $\lim_{n\to\infty} a_n = a$

הפרכה: $a_n = (-1) \to (-1) \ne 1$ אבל $a = 1$, $|a_n| \to |1|$.

מש"ל

שאלה 4

תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה המקיימת $a_n \to 1$. הוכיחו או הפריכו:

א. $(a_n)^n \to 1$

הפרכה: $a_n = 1 + \frac{1}{n} \to 1$ אבל $a_n^n \to e \ne 1$

ב. $\sqrt[n]{a_n} \to 1$

הוכחה:

$a_n \to 1$ ולכן עבור $\varepsilon = \frac{1}{2}$ קיים n_0 כך שלכל $n \ge n_0$ מתקיים $-\frac{1}{2} \le a_n - 1 \le \frac{1}{2}$

לכן לכל $n \ge n_0$ $\frac{1}{2} \le a_n \le \frac{3}{2}$. מכאן לכל $n \ge n_0$: $\sqrt[n]{\frac{1}{2}} \le \sqrt[n]{a_n} \le \sqrt[n]{\frac{3}{2}}$. כעת $\sqrt[n]{\frac{3}{2}} \to 1$ וגם $\sqrt[n]{\frac{1}{2}} \to 1$. לכן ממשפט הכריך נקבל ש $\sqrt[n]{a_n} \to 1$.

תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה המקיימת $a_n \to 0$ וכן $a_n \ne 0$ לכל $n \in \mathbb{N}$. הוכיחו או הפריכו:

ג. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 0$

הפרכה: $a_n = \frac{1}{n} \to 0$ אבל $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \to \frac{1}{1+0} = 1$.

ד. $(a_n)^n \to 0$

הוכחה:

נראה ש $|a_n{}^n| \to 0$ ומכאן נסיק (איך?) ש $a_n{}^n \to 0$.

$a_n \to 0$ ולכן קיים n_0 כך שלכל $n \geq n_0$ $|a_n - 0| = |a_n| < \frac{1}{2}$. נקבל שלכל $n \geq n_0$

$0 \leq |a_n{}^n| = |a_n|^n < \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

כעת ממשפט הכריך נקבל ש $|a_n{}^n| \to 0$ שכן $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ וכן הסדרה הקבועה אפס מתכנסות לאפס.

ה. $\sqrt[n]{a_n} \to 0$

הפרכה: $a_n = \frac{1}{n} \to 0$ אבל $\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to \frac{1}{1} = 1$.

מש"ל

שאלה 5

תהי $\{a_n\}$ סדרה המוגדרת על ידי כלל הנסיגה $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$ ונתון $a_1 > 0$. הוכיחו ש- $\{a_n\}$ אינה חסומה. (רמז: הראו שהיא מונוטונית קודם כל).

פתרון

קל להראות באינדוקציה ש $a_n \geq 0$ לכל n. ולכן $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{a_n} \geq 0$ כלומר הסדרה מונוטונית עולה. נניח ש $\{a_n\}$ הייתה חסומה, לכן היא הייתה מונוטונית וחסומה ולכן מתכנסת לגבול L כלשהוא. לכן $L = \lim a_{n+1} = \lim(a_n + \frac{1}{a_n}) = L + \frac{1}{L}$ ולכן $L = L + \frac{1}{L}$ ולכן $\frac{1}{L} = 0$. אבל אין מספר ממשי שמקיים את המשוואה הזו, וזו סתירה לכך שהסדרה מתכנסת, ולכן היא אינה חסומה.

מש"ל

שאלה 6

תהי הסדרה המוגדרת על ידי כלל הנסיגה $a_{n+1}=\sqrt{a_n}$, ונתון $a_1=c>0$. האם הסדרה מונוטונית עולה? מונוטונית יורדת? האם היא מתכנסת?

פתרון

התשובה תלויה בערכו של c.

מנוטוניות: רוצים לראות מתי $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ גדול מאחד או קטן מאחד. $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\sqrt{a_n}}{a_n}=\frac{1}{\sqrt{a_n}}$.

לכן, אם $a_n<1$ אזי $\sqrt{a_n}<1$ ולכן $\frac{1}{\sqrt{a_n}}>1$ ולכן $a_{n+1}>a_n$. לכן הסדרה תהא מונוטונית עולה אם כל האיברים שלה יהיו קטנים מאחד. אבל קל להראות באינדוקציה שאם $c<1$ אזי כל איברי הסדרה קטנים מאחד: נניח $a_n<1$ לכן $a_{n+1}=\sqrt{a_n}<1$.

באופן דומה, ניתן להראות שעבור $c\ge 1$ הסדרה מונוטונית יורדת.

עבור $c=1$ הסדרה היא קבועה, ולכן ניתן להגדירה הן כמונוטונית יורדת והן כמונוטונית עולה.

התכנסות: הסדרה יורדת וחסומה על ידי 1 או עולה וחסומה על ידי 1 ולכן מתכנסת תמיד.

מש"ל

שאלה 7

נגדיר סדרה באמצעות כלל הנסיגה $a_1=2$, $a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n{}^2+1\right)$. בדקו האם הסדרה מתכנסת, אם כן מצאו את גבולה והוכיחו שהוא אכן הגבול (אחרת, הוכיחו שהיא מתבדרת).

פתרון

הסדרה מתכנסת במובן הרחב ל-∞. תחילה נשים לב שהיא מונוטונית עולה. אכן: $\frac{1}{2}\left(a_n-1\right)^2\ge 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}a_n^2-a_n+\frac{1}{2}\ge 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(a_n{}^2+1\right)\ge a_n \Leftrightarrow a_{n+1}\ge a_n$. שנית, נראה שהיא אינה חסומה מלעיל. נניח בשלילה שהיא חסומה מלעיל. אזי מכך שהיא מונוטונית עולה וחסומה מלעיל אנו מקבלים שהיא מתכנסת במובן הצר. נמצא את הגבול L.

$L=\lim a_{n+1}=\lim 0.5\left(a_n{}^2+1\right)=0.5\lim a_n{}^2+0.5=0.5L^2+0.5$. מפתרון משוואה ריבועית נקבל ש- $L=1$. אך זאת סתירה, מכיוון שהאיבר הראשון הוא 2 והסדרה עולה.
לכן, הסדרה אינה חסומה מלעיל, ולכן (מכיוון שהיא מונוטונית עולה) היא מתכנסת במובן הרחב ל-∞.

מש"ל