תורת הקבוצות — תרגיל בית 10

חיים שרגא רוזנר

ז' בתמוז, תשע"ה*

תקציר

שיקולי עוצמה, קופינליות. הירכיית בורל.

1 עוצמות

תזכורות

1. יהי κ מונה אינסופי, ונניח כי עבור כל $\alpha < \kappa$, יש קבוצה A_α המקיימת $|A_\alpha| \leq \kappa$. אזי $\left|\bigcup_{\alpha<\kappa} A_\alpha\right| \leq \kappa$.
2. יהי κ מונה אינסופי, ונניח כי $\gamma < \operatorname{cf}(\kappa)$ סודר כלשהו. נניח כי מתקיים $\left|\bigcup_{\alpha<\gamma} A_\alpha\right| = \kappa$. אזי קיים $\alpha \in \gamma$ עבורו $|A_\alpha| = \kappa$.

תרגילים

1. נסמן $A^* = \bigcup_{n\in\omega} A^n$, כאשר A^n היא קבוצת הסדרות מאורך n של איברי A (=קבוצת הפונקציות מ־n ל־A). חשבו את $|A^*|$ בהינתן:
   (א) A ריקה.
   (ב) A סופית לא ריקה.
   (ג) A אינסופית. $|A| = \kappa \geq \omega$.

2 הירכיית בורל

תזכורות

1. יהי X מרחב טופולוגי. נגדיר, עבור מרחב זה, את סדרות הקבוצות $\mathbf{\Delta}^0_\alpha, \mathbf{\Pi}^0_\alpha, \mathbf{\Sigma}^0_\alpha$,[1] ברקורסיה לכל סודר $0 < \alpha < \aleph_1$ (כולן תת־קבוצות של $\mathcal{P}(X)$):
   - $\mathbf{\Sigma}^0_1$ הוא אוסף הקבוצות הפתוחות ב־X. $\mathbf{\Sigma}^0_1 = \tau$.

* להגשה עד המבחן, יום שלישי, י"ט במנחם אב (4 אוג') לתא מספר 45 בתאי המילגאים של המחלקה למתמטיקה.

[1] האותיות היווניות הללו הן **מודגשות**, וההירכייה כולה נקראת הירכיית בורל המודגשת. ב־[1] ניתן למצוא הסברים על ההירכייה הבלתי־מודגשת.

- $\mathbf{\Pi}^0_\alpha$ הוא אוסף הקבוצות המשלימות את איברי $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$. $\mathbf{\Pi}^0_\alpha = \left\{B^{\complement} : B \in \mathbf{\Sigma}^0_\alpha\right\}$.
- עבור $\alpha > 1$, $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$ הוא אוסף הקבוצות $A = \bigcup D$ בעבור D בת־מניה המקיימת $D \subseteq \bigcup_{\beta<\alpha} \mathbf{\Pi}^0_\beta$.
  לשון אחר: $A \in \mathbf{\Sigma}^0_\alpha$ אם קיימת סדרה בת־מניה $\{A_i\}_{i\in\omega}$, כאשר לכל i קיים $\beta_i < \alpha$ כך ש $A_i \in \mathbf{\Pi}^0_{\beta_i}$ ומתקיים $A = \bigcup_{i\in\omega} A_i$. בנוסחא:
  $$\mathbf{\Sigma}^0_\alpha = \left\{A : \forall i < \omega \exists \beta_i < \alpha \exists A_i \in \mathbf{\Pi}^0_{\beta_i}, A = \bigcup_{i<\omega} A_i\right\}$$
- $\mathbf{\Delta}^0_\alpha = \mathbf{\Sigma}^0_\alpha \cap \mathbf{\Pi}^0_\alpha$.

2. **σ־אלגברה** על קבוצה X היא זוג סדור (X, Ω) כאשר $\Omega \subseteq \mathcal{P}(X)$, אשר סגור לאיחודים בני־מנייה ולמשלים.
3. **אוסף קבוצות בורל** של מרחב טופולוגי X הוא σ־אלגברה מינימלית המכילה את הקבוצות הפתוחות ב־X, והוא מסומן $\mathcal{B}(X)$.
4. לכל מרחב טופולוגי X, $\bigcup_{\alpha<\aleph_1} \mathbf{\Sigma}^0_\alpha = \mathcal{B}(X)$.
5. עבור המרחב הטופולוגי הרגיל (האוקלידי) של המספרים הממשיים, $|\mathcal{B}(\mathbb{R})| = \mathfrak{c}$. במקרה זה ההירכיה קורסת רק כאשר מגיעים ל־$\aleph_1$.
6. **קבוצת קנטור** C הוגדרה בהרצאה. קבוצת ממשיים זו היא מעוצמה $\mathfrak{c}$ וממידה אפס.

תרגילים

1. יהי α סודר. הוכיחו כי:
   (א) $\mathbf{\Pi}^0_\alpha \subseteq \mathbf{\Sigma}^0_{\alpha+1}$.
   (ב) $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha \subseteq \mathbf{\Pi}^0_{\alpha+1}$.
   (ג) $\mathbf{\Delta}^0_\alpha \subseteq \mathbf{\Delta}^0_{\alpha+1}$.

   הדרכה שימו לב לחוקי דה־מורגן.

2. יהי $\alpha > 1$ סודר. הוכיחו כי:
   (א) $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha \subseteq \mathbf{\Sigma}^0_{\alpha+1}$.
   (ב) $\mathbf{\Pi}^0_\alpha \subseteq \mathbf{\Pi}^0_{\alpha+1}$.
   (ג) $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha \cup \mathbf{\Pi}^0_\alpha \subseteq \mathbf{\Delta}^0_{\alpha+1}$.

   הדרכה שימו לב לחוקי דה־מורגן.

הערה במרחב שאינו מקיים $\mathbf{\Sigma}^0_1 \subseteq \mathbf{\Sigma}^0_2$ עדיין מתקיים $\mathbf{\Sigma}^0_1 \subseteq \mathbf{\Pi}^0_2 \subseteq \mathbf{\Sigma}^0_3$, ולכן לכל $\alpha \geq 3$ מתקיים $\mathbf{\Sigma}^0_1 \subseteq \mathbf{\Sigma}^0_\alpha$. ההכלות היחידות שאינן טריוויאליות הן $\mathbf{\Sigma}^0_1 \subseteq \mathbf{\Sigma}^0_2$ ו־$\mathbf{\Pi}^0_1 \subseteq \mathbf{\Pi}^0_2$. דוגמא למרחב שאינו מקיים $\mathbf{\Sigma}^0_1 \subseteq \mathbf{\Sigma}^0_2$ נמצאת ב־[3].
לסיכום, לכל $1 \leq \beta < \alpha \neq 2$ מתקיים $\mathbf{\Sigma}^0_\beta \subseteq \mathbf{\Sigma}^0_\alpha$ וכן $\mathbf{\Pi}^0_\beta \subseteq \mathbf{\Pi}^0_\alpha$. לכן הבניה הזו נקראת היררכייה, כי כל רמה מוכלת ברמות הבאות אחריה, ולכל קבוצה באוסף ניתן לשאול באיזו רמה היא מופיעה לראשונה.

הערה בכל מרחב מטרי (X,d) מתקיימת ההכלה הבלתי־טריוויאלית $\mathbf{\Sigma}^0_1 \subseteq \mathbf{\Sigma}^0_2$ (ולכן גם $\mathbf{\Pi}^0_1 \subseteq \mathbf{\Pi}^0_2$).

הוכחה: תהי $A \in \mathbf{\Sigma}^0_1$. אזי A פתוחה, ומתקיים

$$A = \left\{x \in X : \forall y \in A^{\complement}, x \neq y\right\} = \left\{x \in X : \forall y \in A^{\complement}, d(x,y) > 0\right\}$$
$$= \bigcup_{n \in \omega} \left\{x \in X : \forall y \in A^{\complement}, d(x,y) \geq \frac{1}{n}\right\}$$

ניתן להראות בכלים טופולוגיים שכל הקבוצות באיחוד שבאגף ימין הן סגורות, ולכן הן כולן שייכות ל־$\mathbf{\Pi}^0_1$, ואיחודן שייך ל־$\mathbf{\Sigma}^0_2$. מצאנו כי $A \in \mathbf{\Sigma}^0_2$, כנדרש. ∎

3. הוכיחו: לכל מרחב טופולוגי X, מתקיים

$$\bigcup_{\alpha<\aleph_1} \mathbf{\Sigma}^0_\alpha = \bigcup_{\alpha<\aleph_1} \mathbf{\Pi}^0_\alpha = \bigcup_{\alpha<\aleph_1} \mathbf{\Delta}^0_\alpha$$

שימו לב כי הטענה כאן נכונה גם אם מחליפים את $\aleph_1$ בכל סודר גבולי.

4. כמה תת־קבוצות של קבוצת קנטור C יש? כמה מהן מדידות־לבג? כמה מהן ממידה אפס? הסיקו כי יש $2^{\mathfrak{c}}$ קבוצות מדידות לבג על הישר הממשי $\mathbb{R}$, למרות שיש רק $\mathfrak{c}$ קבוצות בורל שם.

הערה לנו קשה לתפוס במחשבתנו קבוצה שאיננה קבוצת בורל, למרות המושג מדידה לבג. אם כן, אנו מפסידים בקוצר מחשבתנו את רוב הקבוצות של $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, או אפילו את רוב המדידות שבהן!

ב ה צ ל ח ה!

רשימת מקורות

[1] הערך Borel hierarchy בויקיפדיה האנגלית.
http://en.wikipedia.org/wiki/Borel_hierarchy.

[2] הערך Descriptive set theory בויקיפדיה האנגלית.
http://en.wikipedia.org/wiki/Descriptive_set_theory.

[3] Arnold W. Miller, *Descriptive Set Theory and Forcing*: How to Prove Theorems about Borel Sets the Hard Way, Berlin: Springer-Verlag, 1995. chp 2.
הספר זמין באתר האינטרנט של Euclid Project,
http://projecteuclid.org/euclid.lnl/1235423343.