

## מבוא לטופולוגיה - תרגיל 2

### שאלה 1

הגדרה. יהיה  $M$  מרחב מטרי. הסדרה  $x_n \in M$  נקראת קבועה לבסוף אם קיים  $n_0 \in \mathbb{N}$  וקיים  $a \in M$  כך ש-

$$n \geq n_0 \Rightarrow x_n = a$$

א' תוכיחו שסדרה קבועה לבסוף מתכנסת.

ב' תהי  $x_n$  סדרה במ"מ  $(M, d)$  המתכנסת ל- $x$ . יהיה קיים  $\varepsilon_0 > 0$  כך שלכל שני איברים  $x_m \neq x_n$  מתקיים  $d(x_m, x_n) \geq \varepsilon_0$ .

תוכיחו ש- $x_n$  קבועה לבסוף.

ג' תהי  $x_n$  סדרה במ"מ  $(M, d)$  המתכנסת ל- $x$ . תהי  $\{x_n\}$  קבוצה סופית. תוכיחו ש- $x_n$  קבועה לבסוף.

### שאלה 2

תהי  $x_n$  סדרת קושי במ"מ  $(M, d)$ . תהי  $x_{n_i}$  תתסדרה שלה כך ש-  $x_{n_i} \rightarrow a$ . תוכיחו שגם  $x_n \rightarrow a$ .

### שאלה 3

הגדרה. תתקבוצה  $A$  של מ"מ  $(M, d)$  נקראת חסומה אם קיים כדור  $B(x_0, R)$  כך ש-  $A \subseteq B(x_0, R)$ .

הגדרה. סדרה  $x_n$  במ"מ  $(M, d)$  נקראת חסומה אם קבוצת איבריה חסומה.

תוכיחו שסדרת קושי חסומה.

#### שאלה 4

יהיה  $M$  מרחב מטרי .

א' יהיו  $a \in M$  ו-  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  - פונקציה כך שלכל  $x \in M$  :  $f(x) = d(x, a)$

להוכיח ש- $f$  פונקציה רציפה.

ב' יהיו  $f, g: M \rightarrow \mathbb{R}^n$  פונקציות רציפות כאשר מטריקה ב- $\mathbb{R}^n$  אוקלידית.  
להוכיח ש-  $f + g$  פונקציה רציפה.