תירגול לינארית למורים בש תשפב סמסטר ב

25 במאי 2022

חדוא

1. עבור $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ חשבו את $f^{(100)}(0)$.
פתרון: בהרצאה ראיתם את טור הטיילור

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \left(= \sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)$$

ואם נציב x^2 במקום x נקבל

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots \left(= \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}\right)$$

כיוון של $f(x)$ שלנו יש טור טיילור יחיד (סביב 0) והמקדם x^n הוא

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

המקדם של x^{100} הוא: מצד אחד, לפי התיאוריה הוא

$$\frac{f^{(100)}(0)}{100!}$$

ומצד שני, לפי החישובים שלנו קיבלנו שהמקדם של x^{100} הוא 1. בגלל שטור טיילור יחיד נקבל את השיוויון

$$\frac{f^{(100)}(0)}{100!} = 1$$

ולכן $f^{(100)}(0) = 100!$.

(א) בהמשך לזה: מה הערך $f^{(99)}(0)$? כמו קודם מתקיים ש

$$\frac{f^{(99)}(0)}{99!} = 0$$

(האפס מימין נובע מכך שהחזקה האי זוגיות של x - המקדם שלהם 0). ולכן $f^{(99)}(0) = 0$.

2. עבור $f(x) = x^2 e^x$ חשבו את $f^{(100)}(0)$.
פתרון: נעבוד בצורה דומה לתרגיל קודם: ראיתם בהרצאה את טור הטיילור של e^x:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

ולכן טור טיילור של $f(x)$ הוא

$$x^2e^x = x^2\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right) = x^2+\frac{x^3}{1!}+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^5}{3!}+\cdots$$

המקדם של x^{100} הוא $\frac{1}{98!}$ והוא שווה ל $\frac{f^{(100)}(0)}{100!}$ ולכן נקבל את השיוויון

$$\frac{f^{(100)}(0)}{100!} = \frac{1}{98!}$$

ולכן

$$f^{(100)}(0) = \frac{100!}{98!} = 99\cdot 100 = 9900$$

3. מצאו את טור טיילור (סביב 0) של הפונקציה $f(x)=\sqrt{1+x}$.

פתרון: זה הטור מהצורה

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2+\frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3+\cdots$$

נחשב את הנגזרות הראשונות וננסה להבין את החוקיות -

$$\begin{aligned}
f(x) &= (1+x)^{\frac{1}{2}}\\
f^{(1)}(x) &= \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}\\
f^{(2)}(x) &= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{3}{2}}\\
f^{(3)}(x) &= \left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{5}{2}}\\
f^{(4)}(x) &= \left(-\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{7}{2}}\\
f^{(5)}(x) &= \left(-\frac{7}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{9}{2}}
\end{aligned}$$

אפשר להוכיח, אבל נסתפק בלהשתכנע ש

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\left(1\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\dots\cdot(2n-3)\right)\frac{1}{2^n}\left(1+x\right)^{-\left(\frac{2n-1}{2}\right)}$$

$$= (-1)^{n-1}\frac{\left(1\cdot 3\cdot 5\cdot\dots\cdot(2n-3)\cdot(2n-1)\right)}{(2n-1)}\frac{1}{2^n}\left(1+x\right)^{-\left(\frac{2n-1}{2}\right)}$$

$$= (-1)^{n-1}\frac{(2n)!}{(2n-1)}\cdot\frac{1}{(2\cdot 4\cdots(2n))}\cdot\frac{1}{2^n}\left(1+x\right)^{-\left(\frac{2n-1}{2}\right)}$$

$$= (-1)^{n-1}\frac{(2n)!}{(2n-1)}\cdot\frac{1}{2^n\left(1\cdot 2\cdots n\right)}\cdot\frac{1}{2^n}\left(1+x\right)^{-\left(\frac{2n-1}{2}\right)}$$

$$= (-1)^{n-1}\frac{(2n)!}{(2n-1)}\cdot\frac{1}{2^n\cdot n!}\cdot\frac{1}{2^n}\left(1+x\right)^{-\left(\frac{2n-1}{2}\right)}$$

$$= \frac{(-1)^n}{(1-2n)}\cdot\frac{(2n)!}{n!}\cdot\frac{1}{4^n}\cdot\left(1+x\right)^{-\left(\frac{2n-1}{2}\right)}$$

ולכן המקדם של x^n בפולינום טיילור הוא

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{\frac{(-1)^n}{(1-2n)}\cdot\frac{(2n)!}{n!}\cdot\frac{1}{4^n}\cdot\left(1+0\right)^{-\left(\frac{2n-1}{2}\right)}}{n!} = \frac{(-1)^n}{(1-2n)}\cdot\frac{(2n)!}{(n!)^2}\cdot\frac{1}{4^n}$$

ולכן פוליום טיילור של $\sqrt{1+x}$ הוא

$$1+\frac{-1}{1-2}\cdot\frac{2!}{(1!)^2}\cdot\frac{1}{4^1}x+\frac{1}{1-4}\cdot\frac{4!}{(2!)^2}\cdot\frac{1}{4^2}x^2+\frac{-1}{1-6}\cdot\frac{6!}{(3!)^2}\cdot\frac{1}{4^3}x^3+\cdots$$

ששווה ל

$$1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+\cdots$$

קיבלנו ש

$$\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3$$

ולכן

$$\sqrt{2}\approx 1+\frac{1}{2}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{23}{16}$$

4. חשבו את טור טיילור סביב 0 של $f(x)=\sin(x)$.

פתרון: נגזור ישירות כי זה לא קשה במקרה שלנו

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(x) \\ f^{(1)}(x) &= \cos(x) \\ f^{(2)}(x) &= -\sin(x) \\ f^{(3)}(x) &= -\cos(x) \\ f^{(4)}(x) &= \sin(x) \\ &\vdots \end{aligned}$$

ולכן הנגזרות ב 0 הן

$$(0,1,0-1),(0,1,0,-1),\ldots$$

ולכן

$$\sin(x) = 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{-1}{3!}x^3 + \cdots$$

$$= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots$$

5. מה טור טיילור של $f(x) = 3 + 4x + 5x^3$?

פתרון: הוא עצמו! אפשר להשתכנע עוד קצת בתיאוריה: מה המקדם של x^3 לפי התיאוריה? $\frac{f^{(3)}(0)}{3!}$

$$\begin{aligned} f(x) &= 3 + 4x + 5x^3 \\ f^{(1)}(x) &= 4 + 15x^2 \\ f^{(2)}(x) &= 30x \\ f^{(3)}(x) &= 30 \end{aligned}$$

ולכן

$$\frac{f^{(3)}(0)}{3!} = \frac{30}{6} = 5$$

ואכן המקדם של x^3 הוא 5.

6. חשבו את טור טיילור (סביב 0) של $f(x) = \sin^2(x)$.

פתרון: מתרגיל קודם ראינו ש

$$\sin(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots$$

כעת,

$$f^{(1)}(x) = 2\sin(x)\cos(x) = \sin(2x) = (2x) - \frac{1}{3!}(2x)^3 + \frac{1}{5!}(2x)^5 - \frac{1}{7!}(2x)^7 + \cdots$$

ואם נעשה $\int_0^x$ לשני האגפים נקבל

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(2\frac{x^2}{2}\right) - \frac{1}{3!}2^3\frac{x^4}{4} + \frac{1}{5!}2^5\frac{x^6}{6} - \frac{1}{7!}2^7\frac{x^8}{8} + \cdots \\ &= \frac{2}{2}x^2 - \frac{2^3}{4!}x^4 + \frac{2^5}{6!}x^6 - \frac{2^7}{8!}x^8 + \cdots \end{aligned}$$

(א) מהם $f^{(8)}(0)$? $f^{(9)}(0)$?

פתרון: לפי התיאוריה המקדם של x^8 הוא $\frac{f^{(8)}(0)}{8!}$ ומצאנו שהמקדם הזה הוא $-\frac{2^7}{8!}$ ולכן מתקיים השיוויון

$$\frac{f^{(8)}(0)}{8!} = -\frac{2^7}{8!}$$

ומכאן

$$f^{(8)}(0) = -2^7$$

ובאופן דומה $f^{(9)}(0) = 0$ (המקדם של x^9 הוא 0).

7. ראינו ש

$$\sin(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots$$

ובואו נעשה את הטריק של האינטגרל בשביל למצוא את הפולינום של $\cos(x)$:

ראשית

$$-\sin(x) = -x + \frac{1}{3!}x^3 - \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{7!}x^7 - \cdots$$

נעשה $\int_0^x$ על שני האגפים, במדויק, נעשה כך:

$$\int_0^x -\sin(t)\mathrm{dt} = \int_0^x \left(-t + \frac{1}{3!}t^3 - \frac{1}{5!}t^5 + \frac{1}{7!}t^7 - \cdots\right)\mathrm{dt}$$

ונקבל בצד שמאל

$$\cos(t)\Big|_0^x = \cos(x) - \cos(0) = \cos(x) - 1$$

ובצד ימין

$$-\frac{t^2}{2} + \frac{1}{3!}\frac{t^4}{4} - \frac{1}{5!}\frac{t^6}{6}\cdots\Big|_0^x = -\frac{x^2}{2} + \frac{1}{3!}\frac{x^4}{4} - \frac{1}{5!}\frac{x^6}{6} + \cdots$$

ולכן

$$\begin{aligned}\cos(x) - 1 &= -\frac{x^2}{2} + \frac{1}{3!}\frac{x^4}{4} - \frac{1}{5!}\frac{x^6}{6} + \cdots \\ &= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\end{aligned}$$

נעביר אגף את 1 שבשמאל ונקבל, כמו שראיתם בהרצאה,

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

לינארית

1. האם הבאים הם תתי מרחבים של $\mathbb{R}^3$:

(א)

$$\{(t, s-2, s+t-1) \mid s,t \in \mathbb{R}\}$$

פתרון: מתקיים

$$(1\cdot t+0, s-2+0\cdot t, s+1\cdot t-1) = t\,(1,0,1) + s\,(0,1,1) + (0,-2,-1)$$

בואו נדרג

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3+2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_1-R_3]{R_2-R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

נסיק מהדירוג ש

$$\{(1,0,1), (0,1,1), (0,-2,-1)\}$$

הם בלתי תלויים לינארית ולכן פורשים את המרחב $\mathbb{R}^3$. המסקנה הזאת נכונה אבל היא לא פותרת את השאלה שלנו כי הוקטור $(0,-2,-1)$ לא מוכפל בפרמטר (הוא קבוע). ולכן אנחנו מקבלים את המישור שנפרש על ידי $(1,0,1), (0,1,1)$ שמוזז בוקטור קבוע $(0,-2,-1)$. לפי הגאוגברה רואים שראשית הצירים $(0,0,0)$ לא שייכת לקבוצה שלנו ולכן זהו לא תת מרחב (תת מרחב חייב להכיל את ראשית הצירים). אבל רוצים להצדיק את זה פורמלית: נבדוק האם $(0,0,0)$ שייך לקבוצה שלנו. במידה וכן אז קיימים s,t (כלשהם) כך ש

$$(t, s-2, s+t-1) = (0,0,0)$$

קיבלנו שהשאלה שלנו היא האם למערכת

$$\begin{aligned} t &= 0 \\ s-2 &= 0 \\ s+t-1 &= 0 \end{aligned}$$

יש פתרון. אם יש אז $(0,0,0)$ שייך לקבוצה ואם לא אז $(0,0,0)$ לא שייך לקבוצה. נפתור את מערכת המשוואות

$$\begin{cases} t & = 0 \\ s & = 2 \\ t+s & = 1 \end{cases}$$

ע"י מטריצה ודירוג שלה:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

וקיבלנו שורת סתירה ולכן אין פתרון למערכת ולכן $(0,0,0)$ לא שייך לקבוצה ולכן זהו אינו תת מרחב.

(ב)

$$S = \left\{\left(t^2, t, t\right) \mid t \in \mathbb{R}\right\}$$

פתרון: רואים ש $(0,0,0)$ שייך לקבוצה ($t=0$). אבל זהו אינו תת מרחב. למה?

$$\underbrace{(2^2,2,2)}_{\in S} + \underbrace{\left((-2)^2, -2, -2\right)}_{\in S} = (8,0,0)$$

אבל $(8,0,0)$ לא שייך לקבוצה ולכן אין סגירות לחיבור איברים בקבוצה ולכן זהו אינו תת מרחב.

(ג)

$$\{(1+t, s-2, s+t-1) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$$

פתרון:

$$(1+t, s-2, s+t-1) = t\,(1,0,1) + s\,(0,1,1) + (1,-2,-1)$$

בגאוגברה רואים שזהו אכן תת מרחב (מישור שעובר בראשית) והוא שווה ל

$$\{(t, s, s+t) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$$

שנפרש על ידי $(1,0,1)\,,(0,1,1)$. למה המישורים שווים? נגדיר

$$t' = 1+t$$
$$s' = s-2$$

וכמובן שלכל ערך של s, t יש ערך של s', t' ולהיפך ולכן הקבוצה שלנו שווה ל

$$\{(t', s', (s'+2)+(t'-1)-1) \mid s', t' \in \mathbb{R}\} =$$
$$\{(t', s', s'+t') \mid s', t' \in \mathbb{R}\}$$

וכמו קודם

$$(t', s', s'+t') = t'\,(1,0,1) + s'\,(0,1,1)$$

המישור שנפרש על ידי $(1,0,1)\,,(0,1,1)$ שעובר בראשית.