מבחן באלגברה לינארית 2 – תשע"ג סמסטר א' – מועד א'

שאלה 1

נגדיר אופרטור לינארי $T:\mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ על ידי $T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c+ai \\ c+bi \\ -ci \end{pmatrix}$.

א. האם T הפיך?
ב. האם T ניתן ללכסון?
ג. לכל $n \in \{-1,3,2013\}$ חשב את T^n, או הוכח ש-T^n אינו מוגדר.

שאלה 2

יהיו $n>1$, $J=J_n(0)$ בלוק ז'ורדן עם ערך עצמי 0, $B=J^2$.

א. מצא את הפולינום המינימלי של המטריצה B (אם יש צורך, הפרד בין המקרה ש-n זוגי לבין המקרה ש-n אי זוגי).
ב. מצא את צורת הז'ורדן של B.
ג. הוכח כי המטריצות B,J מתחלפות (כלומר $JB=BJ$), אך אין מטריצה הפיכה P כך שגם $P^{-1}JP$ וגם $P^{-1}BP$ הן בצורת ז'ורדן.

שאלה 3

יהי $V=\mathbb{R}_2[x]$ מרחב הפולינומים ממעלה לכל היותר 2. נגדיר מכפלה פנימית על V על ידי

$$\langle a_1+b_1x+c_1x^2, a_2+b_2x+c_2x^2\rangle = 4a_1a_2+2b_1b_2+c_1c_2$$

לכל $a_1+b_1x+c_1x^2, a_2+b_2x+c_2x^2 \in V$.

א. הוכח שזו אכן מכפלה פנימית.
ב. מצא בסיס אורתונורמלי של V.

שאלה 4

יהי V מרחב מכפלה פנימית, ויהי $T:V\to V$ אופרטור לינארי כך שהפולינום האופייני של T מתפרק לגורמים לינאריים.

הוכח: קיים בסיס אורתונורמלי B של V כך שהמטריצה $[T]_B$ משולשית.