תרגול 11

24 בדצמבר 2013

דטרמיננטה

תהא $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ ריבועית. אזי הדטרמיננטה של A (סימון: $det(A), |A|$) היא פונקציה "המבשלת" ממקדמי A סקלאר ב $\mathbb{F}$. (בעזרת כפל וחיבור). בסימון פורמאלי $det : \mathbb{F}^{n\times n} \to \mathbb{F}$

הדטרמיננטה של A נקבעת באופן יחיד ע"י שלושת התכונות הבאות: (נדגים באמצעות המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$)

1. לינאריות -

(א) אם A, B, C מטריצות כך ש $R_i(A) = R_i(B) + R_i(C)$ ולכל $j \neq i$ מתקיים $R_j(A) = R_j(B) = R_j(C)$ אזי $det(A) = det(B) + det(C)$ (למשל $det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} + det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$)

(ב) אם $B \xrightarrow{\alpha R_i(A) \to R_i(A)} A$ (כפל בסקלאר) אזי $det(B) = \alpha \cdot det(A)$ (למשל $det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = 2 \cdot det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$)

2. אם $B \xrightarrow{R_i(A) \leftrightarrow R_j(A)} A$(החלפת שורות) אזי $det(B) = -det(A)$ (למשל $det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$)

3. $det(I_n) = 1$

הערות: ישירות (או כמעט) נובע מההגדרה כי

1. אם ל A יש שורת אפסים או 2 שורות זהות או שורה אחת שהיא כפולה של השניה אזי $det(A) = 0$
"הוכחה" במקרה של שורת אפסים נקבל לפי לינארית א כי $|A| = |A| + |A|$.
במקרה של 2 שורות זהות לפי החלפת שורות נקבל כי $|A| = -|A|$
במקרה של כפולה: נקבל $|B| = \alpha|A|$ כאשר ל A יש 2 שורות זהות

2. אם $B \xrightarrow{R_i(A) + \alpha R_j(A) \to R_i(A)} A$ (הוספת כפולה של שורה אחת לשורה אחרת) אזי $det(A) = det(B)$ (כעת אנו יודעים איך משפיעות הפעולות האלמנטריות על הדטר'

)

"הוכחה" לפי לינאריות נקבל כי $|B| = |A| + |A'|$ כאשר A' זהה ל A פרט לשורה i ששם נמצא כפולה של שורה j ולכן $|A'| = 0$

3. עבור מטריצה A משולשית אזי $det(A)$ הוא מכפלת איברי האלכסון.

"הוכחה" - אם יש שורת אפסים אז 0= . אחרת נוכל לדרג אותה לצורה קנונית I_n ואת איברי האלכסון נוכל להוציא בשימוש כפל בסקלאר. כלומר = $det\begin{pmatrix} \alpha_1 & * & * & * \\ 0 & \alpha_2 & * & * \\ 0 & 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$

$$det\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_n \end{pmatrix} = \alpha_1 \cdots \alpha_n det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

חישוב דטרמיננטה

שיטה א. דירוג לצורה משולשית:

תרגיל: תהא $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ -1 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ חשב $det(A)$

פתרון:

$$\begin{aligned} det(A) &= -det\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} = -det\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \\ &= det\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = (1)\cdot(1)\cdot(-4) = -4 \end{aligned}$$

שיטה ב.- פיתוח לפי שורה

הגדרה: תהא A מטריצה אזי המינור ה- i,j (סימון: $M_{i,j}$) הוא הדטר' של תת מטריצה A המתקבלת ממחיקת שורה i ועמודה j

לדוגמא עבור $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ -1 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ המינור $(2,1)$ הוא $M_{2,1} = det(\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -4 \end{pmatrix})$.

מהגדרת דטר' נובע כי $det(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = ad - bc$ וניתן לפתח נוסחא רקורסבית (פיתוח לפי שורה i) להדטר' $det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} M_{i,j}$ (כי $M_{i,j}$ היא דטר' של מטריצה יותר קטנה מ A)

לדוגמא: נחשב את $det(A)$ לפי שורה 2:

$$
\begin{aligned}
det(A) &= \sum_{j=1}^{3}(-1)^{2+j}a_{2,j}M_{2,j} \\
&= (-1)^{2+1}a_{2,1}M_{2,1} + (-1)^{2+2}a_{2,2}M_{2,2} + (-1)^{2+3}a_{2,3}M_{2,3} \\
&= -(-1)det(\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}) + (-3)det(\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}) - 0 \cdot det(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}) \\
&= [1 \cdot (-4) - 3 \cdot 5] - 3 \cdot [0 \cdot (-4) - 1 \cdot 5] \\
&= [-19] - 3 \cdot [-5] = -4
\end{aligned}
$$

הערה: כמובן שפיתוח לפי כל שורה נותן אותה תוצאה.

תכונות של דטרמיננטה:

1. $det(A) = det(A^t)$ (מכאן נובע כי מה שנכון לגבי שורות נכון לגבי עמודות- לדוגמא, 2 עמודות אפסים גורר דטר' שווה 0 , ניתן לפתח לפי עמודה וכו')
2. $det(AB) = det(A) \cdot det(B)$
3. $|A^k| = |A|^k$
4. אם A הפיכה $\Leftrightarrow$ $det(A) \neq 0$. אם A הפיכה אזי מתקיים $det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$
5. אם $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ מרוכבת אזי $det(\bar{A}) = \overline{det(A)}$ כאשר $(\overline{A})_{i,j} := \overline{(A)_{i,j}}$ הצמדת כל האיברים במטריצה
הוכחה: $det(A) = \sum_{\sigma\in S_n}\prod_{k=1}^{n} sgn(\sigma)a_{i\sigma(i)}$ היא מכפלות וסכומים של אברי A. אם נצמיד כל איבר ב A נקבל את אותו ביטוי עם איברים צמודים $\sum_{\sigma\in S_n}\prod_{k=1}^{n} sgn(\sigma)\overline{a_{i,\sigma(i)}}$.
כיוון שהצמדה יכולה לעלות מעל סכומים ומכפלות (כלומר $\overline{x+y} = \bar{x}+\bar{y}, \ \overline{xy} = \bar{x}\bar{y}$) נקבל $\overline{\sum_{\sigma\in S_n}\prod_{k=1}^{n} sgn(\sigma)a_{i\sigma(i)}}$ כלומר $\overline{det(A)}$.

תרגילים:

1. תהא מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ בטא בעזרת $det(A)$ את $det(2A)$.
פתרון: מכל שורה של A ניתן להוציא 2 גורם משותף. כל פעם שמוציאים סקלאר הדטר' מוכפלת באותו סקלאר לכן $det(2A) = 2^n det(A)$.
2. תהא $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה אנטי סימרית. הוכח: אם n אי זוגי אזי A לא הפיכה
פתרון: $A^t = -A$ ע"י הפעלת דטרמיננטה משני הצדדים נקבל
$det(A) = det(A^t) = det(-A) = (-1)^n det(A) = -det(A)$ ולכן $det(A) = 0$
כלומר A אינה הפיכה.
3. הגדרה: A, B מטריצות יקראו דומות אם $B = PAP^{-1}$ (עבור מטריצה P הפיכה)
הוכח שאם A, B מטריצות דומות אזי $det(A) = det(B)$

פתרון: מכפליות של הדטר' נקבל:

$$\begin{aligned} det(B) &= det(PAP^{-1}) = det(P)\cdot det(A)\cdot (P^{-1}) \\ &= det(P)\cdot det(P^{-1})\cdot det(A) = det(A) \end{aligned}$$

4. $Q\in\mathbb{C}^{n\times n}$ מרוכבת אונטרית כלומר מתקיים $QQ^*=I$ (הגדרה: $Q^*=\bar{Q}^t$ כלומר $(Q^*)_{i,j}=\overline{(Q)_{j,i}}$)

(א) מהו $|det(Q)|$ (כאן $|\cdot|$ הוא הערך המוחלט המרוכב)

פתרון : $1=det(I)=det(Q)det(Q^*)=det(Q)\overline{det(Q^t)}=det(Q)\overline{det(Q)}=$ $|det(Q)|^2$.

ולכן $|det(Q)|=1$

(ב) מתי קיים m טבעי כך ש $det(Q^m)=1$

פתרון: לפי סעיף א ניתן לכתוב $det(Q)=cis(\theta)$ ואז רק אם θ מהצורה $\theta=2\pi\frac{k}{m}$ מתקיים $det(Q^m)=det(Q)^m=cis(2\pi\frac{k}{m})^m=cis(2\pi k)=1$.

5. נגדיר $A_n=\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & & \vdots \\ 1 & 1 & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & & \ddots & \alpha & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ חשב $det(A_n)$

פתרון: נחבר לשורה הראשונה את שאר השורות ונקבל

$$
\begin{aligned}
det(A_n) &= det\begin{pmatrix} \alpha+(n-1) & \alpha+(n-1) & \alpha+(n-1) & \cdots & \alpha+(n-1) \\ 1 & \alpha & 1 & & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \alpha & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix} \\
&= [\alpha+(n-1)]\cdot det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \alpha & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix} \\
&= [\alpha+(n-1)]\cdot det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \alpha-1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \alpha-1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \alpha-1 \end{pmatrix} \\
&= [\alpha+(n-1)]\cdot(\alpha-1)^{n-1}
\end{aligned}
$$

מטירצת הקופקטורים והמטריצה הצמודה

הגדרה: תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ אזי מטריצת הקופקטורים (מסומן $cof(A)\in\mathbb{F}^{n\times n}$) מוגדרת $(cof(A))_{i,j}=(-1)^{i+j}M_{i,j}$ כאשר $M_{i,j}$ הוא המינור i,j . (שימו לב שהביטוי דומה לביטוי שמופיע בפיתוח דטר' לפי שורה רק בלי התוספת של הכפלה באיבר ה $a_{i,j}$)

דוגמא: $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ -1 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ מצא את $cof(A)$

פתרון: באופן כללי $cof(A)=\begin{pmatrix} M_{11} & -M_{12} & M_{13} \\ -M_{21} & M_{22} & -M_{23} \\ M_{31} & -M_{32} & M_{33} \end{pmatrix}$

$$M_{1,1}=det(\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 3 & -4 \end{pmatrix})=12,\ M_{2,1}=det(\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -4 \end{pmatrix})=-19$$

$$M_{3,1}=det(\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 0 \end{pmatrix})=15$$

ולכן (עם חישובים נוספים) $cof(A)=\begin{pmatrix} 12 & -4 & 0 \\ 19 & -5 & 1 \\ 15 & -5 & 1 \end{pmatrix}$.

הגדרה: תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ אזי המטריצה הצמודה היא $adj(A)=[cof(A)]^t$.

משפט: $A\cdot adj(A)=|A|\cdot I_n$ (בפרט אם A הפיכה אזי $A^{-1}=\frac{adj(A)}{|A|}$

דוגמא: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ -1 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 & -4 & 0 \\ 19 & -5 & 1 \\ 15 & -5 & 1 \end{pmatrix}^t = -4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ -1 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-4} \cdot \begin{pmatrix} 12 & -4 & 0 \\ 19 & -5 & 1 \\ 15 & -5 & 1 \end{pmatrix}^t$$

תרגיל: תהא $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ הפיכה הוכח : $|adj(A)| = |A|^{n-1}$

הוכחה: נסמן $|A| = \alpha \neq 0$ (כיוון ש A הפיכה) לפי משפט מתקיים $A \cdot adj(A) = \alpha \cdot I_n$ ולכן $\alpha^n = \alpha^n |I_n| = |\alpha I_n| = |A| \cdot |adj(A)| = \alpha \cdot |adj(A)|$. נחלק ב α ונקבל את הדרוש.

כלל קרמר

משפט (כלל קרמר): תהא $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ הפיכה אזי למערכת $Ax = b$ יש פתרון יחיד.

הפתרון הוא $x_i = \frac{det(A_i)}{det(A)}$ כאשר A_i היא המטריצה A שהחלפנו לה את העמודה ה־i בוקטור b.

תרגיל: נתונה המערכת $\begin{cases} x - 2y &= 1 \\ x - y &= 5 \end{cases}$ מצא את הפתרון שלה בעזרת כלל קרמר

פתרון: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

ולפי קרמר $x = \frac{det(A_1)}{det(A)} = \frac{9}{1} = 9, y = \frac{det(A_2)}{det(A)} = \frac{4}{1} = 4$.

תרגיל: $\begin{cases} x - 2y + z &= 1 \\ x - y &= 5 \end{cases}$ מצא את הפתרון שלה בעזרת כלל קרמר

פתרון: נחשוב על z נתון ונקבל את המערכת $\begin{cases} x - 2y &= 1 - z \\ x - y &= 5 \end{cases}$ ואז כמו קודם

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} 1-z & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1-z \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

ולפי קרמר $x = \frac{det(A_1)}{det(A)} = \frac{z-9}{1} = z - 9, y = \frac{det(A_2)}{det(A)} = \frac{4+z}{1} = 4 + z$

ולכן הפתרון הכללי הוא $\begin{pmatrix} t-9 \\ 4+t \\ t \end{pmatrix}$.