לינארית 1 (88112), סמסטר קיץ תשעו,מועד ב'-פתרון

חלק א

1. זהו משפט הדרגה- הוכחתם בהרצאה.

2. יהיו $A \in \mathbb{R}^{n\times m},\ B \in \mathbb{R}^{m\times n}$. נתון שבמטריצה A יש שורת אפסים.

   (א) הוכיחו/הפריכו: המטריצה AB אינה הפיכה.
   פתרון: הוכחה: אם במטריצה A יש שורת אפסים בשורה i אזי במטריצה AB יש גם שורת אפסים בשורה i שהרי

   $$R_i(AB) = R_i(A)B = 0B = B$$

   ולכן AB אינה הפיכה.

   (ב) הוכיחו/הפריכו: המטריצה BA אינה הפיכה.
   פתרון: הפרכה:למשל

   $$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   ב A יש שורת אפסים (שורה שניה) והכפל

   $$BA = (1)$$

   היא מטריצת היחידה מגודל 1×1 שהפיכה.

3. יהא V מ"ו נוצר סופית מימד לפחות 2 ו $T: V \to V$ ה"ל. נתון שקיימת מטריצה A כך שלכל שני בסיסים B, C של V מתקיים $[T]_C^B = A$. הוכיחו: $A = 0$.

פתרון: הוכחה: נב"ש ש $A \neq 0$ אזי $T \neq 0$ ואז קיים $v \in V$ כך ש $Tv \neq 0$. נשלים את $\{v\}$ לבסיס B (שימו לב ש $v \neq 0$ כי $Tv \neq 0$) ונשלים את $\{Tv\}$ לבסיס C ונקבל כי העמודה הראשונה ב $[T]_C^B$ היא $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. מצד שני, אם נחליף בסיס C בין הוקטור הראשון לשני נקבל ש Tv הוא הוקטור השני בבסיס שנסמנו $\hat{C}$. נקבל כי העמודה הראשונה ב $[T]_{\hat{C}}^B$ היא $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

לפי הנתון

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = C_1(A) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

סתירה.

חלק ב

4. נסמן $V=\mathbb{R}^4$ ונגדיר

$$W=...$$
$$U=...$$

מצאו בסיסים ומימדים ל 4 המרחבים $U,W,U\cap W,U+W$.
פתרון: כולם מוזמנים לכתוב פתרון מסודר ולעלות לאתר. נסתפק פה ש U מוצג ע"י span ו W ע"י משוואות. מכאן ניתן להמשיך את הפתרון עם אלגוריתמיקה ידועה ומוכרת.

5. נגדיר

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{4\times4}$$

(א) מצאו בסיס ומימד של ת"מ $W=\left\{v\in\mathbb{R}^4 \mid Av=v\right\}$.
פתרון: מתקיים

$$W=\left\{v\in\mathbb{R}^4 \mid Av=v\right\}=\left\{v\in\mathbb{R}^4 \mid Av-v=0\right\}=\left\{v\in\mathbb{R}^4 \mid (A-I)\,v=0\right\}=N(A-I)$$

ולכן נדרג את $A-I$ לקבל

$$\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}-I=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

ואז

$$W=\left\{\begin{pmatrix}t\\0\\s\\0\end{pmatrix} \mid s,t\in R\right\}=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

(ב) מצאו מטריצה $B\in\mathbb{R}^{4\times4}$ כך ש $(A-I)\,B=0$ וגם $\text{rank}B=2$.
פתרון: נגדיר

$$B=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

והיא מ $\text{rank}B=2$. מהחישובים של סעיף קודם, עמודות B הם במרחב האפס של $A-I$ ולכן

$$(A-I)\,B=0$$

כנדרש.

6. (א) תהיינה $A,B\in\mathbb{R}^{3\times3}$ כך ש $C(A)\oplus R(B)=\mathbb{R}^3$ הוכיחו כי $A\neq B$.
פתרון: נב"ש $A=B$ אזי $\dim C(A)=\dim R(B)$ ואז לפי הנתון

$$3=\dim\mathbb{R}^3=\dim C(A)+\dim R(B)-\dim C(A)\cap R(B)=2\dim R(B)-0$$

ואז

$$\dim R(B)=1.5$$

אבל $\dim R(B)$ מספר שלם. סתירה.

(ב) תהא $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ ונניח כי $A^2 = 0$. הוכיחו כי $A - 2I$ הפיכה.

פתרון: מתקיים כי

$$\left(A-2I\right)\left(A+2I\right)=A^{2}-4I$$

ומההנחה נקבל ש

$$\left(A-2I\right)\left(A+2I\right)=A^{2}-4I=-4I$$

ולכן

$$\left(A-2I\right)\cdot\frac{\left(A+2I\right)}{-4}=I$$

ולכן

$$\left(A-2I\right)^{-1}=\frac{\left(A+2I\right)}{-4}$$

ובפרט $\left(A-2I\right)$ הפיכה.