פיתרון תרגיל בית 6 במתמטיקה בדידה 2
83-118 סמסטר ב' תשע"ו

1 במאי 2016

1. יהיו $k,n \in \mathbb{N}$ כאשר $0 \le k \le n$. הוכיחו בדרך קומבינטורית את הזהות הבאה:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k} = 2^{2n}$$

(הדרכה: נחשוב על אגף ימין כסופר את כל תתי הקבוצות של $[2n+1] = \{1,2,...,2n+1\}$ שהאיבר $2n+1$ לא שייך אליהן. נסו להתאים (באופן חח"ע ועל) בין הקבוצות הנספרות באגף שמאל לבין אלה שציינתי.)

פיתרון הוכחה בדרך קומבינטורית: אגף ימין הוא מספר תתי הקבוצות של $[2n+1] = \{1,\dots,2n+1\}$ שלא כוללות את האיבר $2n+1$. אגף שמאל סופר כמה תת־קבוצות של $\{1,\dots,2n+1\}$ הן לכל היותר בגודל n. התאמה חח"ע ועל תתאים לתת־קבוצה שלא מכילה את $2n+1$ את עצמה אם היא לכל היותר בגודל n, ואחרת (אם יש בה יותר מ־n איברים) תתאים את המשלימה שלה (שחייבת להיות לכל היותר בגודל n).

נפרמל: נסמן $Y = \{B \subseteq [2n+1] : |B| \le n\}$, $X = \{A \subseteq [2n+1] : 2n+1 \notin A\}$, צ"ל: $|X| = |Y|$. נגדיר התאמה $f : X \to Y$ ע"י:

$$f(A) = \begin{cases} A & |A| \le n \\ A^c & |A| > n \end{cases}$$

נראה שההתאמה חח"ע ועל: חח"ע כי אם $A_1 \neq A_2 \in X$, נחלק למקרים:

א. $|A_1| \le n, |A_2| \le n$, נקבל ש־ $f(A_1) = A_1 \neq A_2 = f(A_2)$.

ב. $|A_1| > n, |A_2| > n$, נקבל ש־ $f(A_1) = A_1^c \neq A_2^c = f(A_2)$.

ג. בה"כ $|A_1| \le n, |A_2| > n$, נקבל ש־ $f(A_1) = A_1, f(A_2) = A_2^c$, ולכן $2n+1 \in f(A_2)$, $2n+1 \notin f(A_1)$, ולכן $f(A_1) \neq f(A_2)$.

על: כי לכל קבוצה מגודל לכל היותר n המקור שלה הוא עצמה אם היא לא מכילה את $2n+1$, והמשלים אם כן.

2. הוכיחו בדרך אלגברית:

א. $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1)$.

ב. $\sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k k\binom{n}{k} = 0$

פיתרון א. נשים לב שלכל $0 \le k \le n$ מתקיים: $\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{k+1}\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{1}{n+1}\cdot\frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}$. ולכן נקבל:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1} = \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} - \binom{n+1}{0}\right)$$

כעת, $\sum\limits_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} = 2^{n+1}$, וכן $\binom{n+1}{0} = 1$, ולכן נקבל:

$$\frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1)$$

ב. ניזכר מתרגילים קודמים שלכל $1 \le k \le n$ מתקיים: $k\cdot\binom{n}{k} = k\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = n\cdot\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n\cdot\binom{n-1}{k-1}$. ולכן נקבל:

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k n\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k+1}\binom{n-1}{k} \overset{*}{=} -n\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k\binom{n-1}{k} \overset{**}{=} -n\cdot 0 = 0$$

כאשר בשיוויון $*$ כפלתי פעמיים במינוס: פעם אחת מבחוץ על כל הסכום, ופעם אחת בכל איבר בפנ"ע, כי $-(-1)^{k+1} = (-1)^{k+2} = (-1)^k$. בשיוויון $**$ השתמשתי במה שראינו בעבר $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k\binom{n}{k} = 0$ שנכון גם עבור $n-1$.

3. חשבו את:

א. $\gcd(222,123)$.

ב. $\gcd(320,102)$.

פיתרון א. $(222,123) = [222 = 1\cdot 123 + 99] = (123,99) = [123 = 1\cdot 99 + 24] = (99,24) = [99 = 4\cdot 24 + 3] =$ $(24,3) = [24 = 8\cdot 3 + 0] = (3,0) = 3$.

ב. $(320,102) = [320 = 3\cdot 102 + 14] = (102,14) = [102 = 7\cdot 14 + 4] = (14,4) = [14 = 3\cdot 4 + 2] = (4,2) =$ $[4 = 2\cdot 2 + 0] = (2,0) = 2$.

4. אוקלידס מורחב: יהיו $n,m \in \mathbb{N}$ ונסמן $d = gcd(n,m)$. הוכיחו שקיימים $a,b \in \mathbb{Z}$ כך ש־ $an + bm = d$. (הדרכה: במעבר האינדוקטיבי מ־$n-1$ ל־ n יש להשתמש באלגוריתם אוקלידס שראינו בתרגול. ניתן להניח בה"כ $m \le n$.)

פיתרון בסיס האינדוקציה: אם $m = 0$, אז $d = gcd(n,0) = n$ ואז נבחר $a = b = 1$ ונקבל הדרוש. נניח נכונות לכל הזוגות $(i,j) < (n,m)$ (כלומר, $i \le n, j \le m$ ואחד מהם קטן ממש), ונראה עבור (n,m). לפי אלגוריתם אוקלידס ידוע

$d = gcd(n,m) = gcd(m, n(mod\, m))$, נסמן $r = n(mod\, m)$, אם $r = 0$, חזרנו לבסיס שפתרנו. אחרת, אז נקבל מהנחת האינדוקציה שקיימים $a, b \in \mathbb{Z}$ כך ש־ $an + br = d$. r הוא השארית של n אחרי חלוקה ב־m. כלומר יש $q \in \mathbb{N}$ כך ש־$n = qm + r$ ולכן $r = n - qm$, ונקבל:

$$d = an + br = an + b(n - qm) = (a + b)n + (-bq)m$$

האיברים שעושים את העבודה הם: $a + b, -bq$, שכמובן שניהם שלמים.