84-172 מתמטיקה ב' לכימאים – פתרון בוחן אמצע – תשפ"ג – 15.06.23

שאלה 1

נביט במערכת המשוואות הבאה עם הנעלמים x, y, z והפרמטר a, בשדה המספרים הממשיים.

$$\begin{cases} x + az = 1 \\ x + (a-1)y + (a+1)z = a-1 \\ -x + (a^2-2a)z = a-1 \\ (a-1)x + (1-a)y + (a^2-a-1)z = 1 \end{cases}$$

נתחיל בדירוג המטריצה המתאימה

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & 1 \\ 1 & a-1 & a+1 & a-1 \\ -1 & 0 & a^2-2a & a-1 \\ a-1 & 1-a & a^2-a-1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_4-(a-1)R_1]{\substack{R_2-R_1 \\ R_3+R_1}}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1 & a-2 \\ 0 & 0 & a^2-a & a \\ 0 & 1-a & -1 & 2-a \end{array}\right) \xrightarrow{R_4+R_2}$$

חישוב צד

$$a^2 - a - 1 - (a-1)a = a^2 - a - 1 - a^2 + a$$

$$1 - (a-1) =$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1 & a-2 \\ 0 & 0 & a^2-a & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

סעיף א': (18 נק')

מצאו לכל ערכי הפרמטר a אם למערכת יש פתרון יחיד, אינסוף פתרונות או אין פתרונות כלל

אם $a - 1 \neq 0$ וכן $a^2 - a \neq 0$ כלומר אם $a \neq 0,1$ אז

המטריצה מדורגת, אין שורת סתירה, אין משתנים חופשיים (אפילו שיש שורת אפסים, שכאמור זה לא אומר כלום), ולכן יש פתרון יחיד.

נציב את המקרים הנותרים

נציב $a = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

מדורגת, אין סתירה, יש חופשי, ולכן אינסוף פתרונות.

נציב $a = 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1 & a-2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

יש שורת סתירה, אין פתרון.

סה"כ עבור

$a \neq 0,1$ יש פתרון יחיד

$a = 0$ יש אינסוף פתרונות

$a = 1$ אין פתרונות.

סעיף ב': (10 נק')

מצאו את כל הפתרונות למערכת עבור $a = 0$

נמשיך את הדירוג מסעיף א' עבור $a = 0$ לדירוג קנוני

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

נציב $z = t$

$$x = 1$$

$$y = 2 + t$$

הפתרון הכללי הוא

$$(1,2+t,t) = (1,2,0) + t(0,1,1)$$

סעיף ג': (10 נק')

מצאו את כל הפתרונות למערכת עבור $a = 2$

נציב $a = 2$ ונדרג קנונית

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2}R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 - R_3]{R_1 - 2R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ולכן הפתרון היחיד הוא

$$(-1,-1,1)$$

<u>שאלה 2</u>

יהי פרמטר a. נביט בהעתקה הלינארית $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ המקיימת

$$T(1,0,0) = (1,0,0)$$
$$T(0,1,0) = (0,1,1)$$
$$T(0,0,1) = (a,0,1)$$

סעיף א': (10 נק')

מצאו את המטריצה המייצגת $[T]$

נשים את הוקטורים אליהם איברי הבסיס הסטנדרטי נשלחים בעמודות

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

סעיף ב': (15 נק')

הוכיחו כי המטריצה המייצגת הפיכה ומצאו את $[T]^{-1}$ ההופכית, הביעו תשובתכם באמצעות הפרמטר a.

נהפוך את המטריצה המייצגת

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 - aR_3}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & a & -a \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

ולכן

$$[T]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & a & -a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

הערה: אם נסמן

$$T(x,y,z) = [T]\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$$

ולכן

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = [T]^{-1}\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$$

סעיף ג': (3 נק')

מצאו את $T(1,2,3)$, הביעו את תשובתכם באמצעות הפרמטר a.

$$T(1,2,3) = [T]\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3a \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

סעיף ד': (10 נק')

נתון בנוסף כי $T(1,1,1) = (0,1,2)$, מצאו את ערכו של הפרמטר a.

$$T(1,1,1) = [T]\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = [T]^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a & -a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-2a \\ * \\ * \end{pmatrix}$$

ולכן

$$1 = -a$$

$$a = -1$$

<u>שאלה 3</u>

סעיף א': (15 נק')

מצאו את כל הפתרונות בשדה המרוכבים למשוואה $i \cdot z^3 = 1 + i + 2cis(\pi)$

$$i \cdot z^3 = 1 + i + 2cis(\pi) = 1 + i + 2(-1) = i - 1$$

נכפול את שני הצדדים בצמוד המרוכב של i הלא הוא $-i$

$$z^3 = 1 + i$$

נעביר את צד ימין לצורה גאומטרית (קוטבית)

$$z^3 = \sqrt{2}cis\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

ולכן שלושת הפתרונות למשוואה הם

$$z_k = \sqrt[3]{\sqrt{2}}cis\left(\frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi k}{3}\right)$$

כאשר $k = 0,1,2$

סעיף ב': (15 נק')

מצאו את כל הפתרונות בשדה המרוכבים למשוואה $z^5 = 1$

נעביר את צד ימין לצורה גאומטרית (קוטבית)

$$z^5 = cis(0)$$

ואז חמשת הפתרונות הם

$$z_k = \sqrt[5]{1}cis\left(\frac{0 + 2\pi k}{5}\right)$$

כאשר $k = 0,1,2,3,4$

סעיף ג': (8 נק')

מצאו את הזוית בין הוקטורים $(0,-1,1)$, $(1,1,4)$

נזכור כי המכפלה הסקלרית מקיימת כי

$$v \cdot w = |v| \cdot |w| \cdot \cos(\theta)$$

לכן

$$\cos(\theta) = \frac{v \cdot w}{|v| \cdot |w|}$$

ובמקרה שלנו

$$\cos(\theta) = \frac{(1,1,4) \cdot (0,-1,1)}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 4^2}\sqrt{1^1 + 1^2}} = \frac{-1 + 4}{\sqrt{6}\sqrt{2}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ולכן

$$\theta = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$