

אלגברה מופשטת 1 - תרגיל 7

29 בנובמבר 2015

1. הוכיחו את הסעיפים הבאים:
 - א. $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_7$.
 - ב. $GL_n(F)/SL_n(F) \cong F^\times$ לכל שדה F .
 - ג. $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong \mathbb{T}$, כאשר $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ חבורה ביחס לכפל.
2. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות.

במקרים בהם הטענה נכונה מצאו את ההומומורפיזם המתאים ואת הגרעין שלו.

 - א. קיים אפימורפיזם מ S_{14} לחבורה מסדר 34.
 - ב. קיים אפימורפיזם $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_{60}$.
 - ג. קיים אפימורפיזם $\varphi: \mathbb{Z}_{60} \rightarrow \mathbb{Z}_{12}$.
 - ד. קיים אפימורפיזם $\varphi: D_6 \rightarrow U_{13}$.
 - ה. קיים מונומורפיזם $\varphi: \mathbb{Z}_{24} \rightarrow S_4$.
3. ענו על השאלה הבאה:

תהי $H \leq G$, הראו כי $Z(H) \supseteq Z(G) \cap H$, ותנו דוגמא שבה זאת הכלה אמיתית.
4. תהי $Q_8 = \{i, j, k, -i, -j, k, 1, 1\}$ החבורה עם פעולת הכפל הבאה:
$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$
חבורה זאת נקראת חבורת הקוטרניונים.
 - א. בנו את טבלת הכפל שלה.
 - ב. מצאו את כל תת החבורות שלה, והוכיחו שכולן נורמליות.
 - ג. שימו לב, זאת דוגמא לחבורה לא אבלית, שכל תת החבורות שלה נורמליות.
 - ג. הוכיחו ש Q_8 לא איזומורפית ל D_4 .
5. ענו על הסעיפים הבאים:
 - א. תהי G חבורה עם תת חבורה H ותת חבורות נורמליות N, N' . הוכיחו: אם $N \cap H = N' \cap H$ אזי $(HN)/N \cong (HN')/N'$.
 - ב. תהי G חבורה ו $N \triangleleft G$. נניח ש G/N ו N אבליות. תהי $H \leq G$ תת חבורה כלשהי. הוכיחו שקיימת $H \triangleleft K$ כך ש $K \triangleleft H/K$ ו H/K אבליות.
6. ענו על הסעיפים הבאים:
 - א. תנו דוגמא נגדית לטענה השגויה הבאה: אם $A, B \triangleleft G$ ו $G/A \cong B$ אז $G/B \cong A$.
 - ב. נניח $K \triangleleft G$ ו $G/K \cong \mathbb{Z}$. הוכיחו שלכל n טבעי קיימת ב G תת חבורה מאינדקס n .

7. תהי G חבורה (לא בהכרח סופית) ותהיינה $A, B \triangleleft G$. הוכיחו או הפריכו:
א. אם $A \cong B$ אז $G/A \cong G/B$.
ב. אם $G/A \cong G/B$ אז $A \cong B$.
ג. אם $G/A \cong G$ אז A היא החבורה הטריוויאלית.
מסקנה: טיפוס האיזומורפיזם של A אינו קובע את טיפוס האיזומורפיזם של G/A , וכן להפך.