פתרון תרגיל בית 9 מבוא לתורת החבורות
88-211 סמסטר א' תשע"ז

הוראות בהגשת הפתרון יש לרשום שם מלא, מספר ת"ז ומספר קבוצת תרגול. תאריך הגשת התרגיל הוא בתרגול בשבוע המתחיל בתאריך ב' שבת ה'תשע"ז, 5.2.2017.

הערה. לאורך התרגיל נסמן את מספר תת-חבורות p-סילו של חבורה G ב $n_p(G)$ או ב n_p.

שאלות חימום

שאלות החימום הן שאלות שאינן להגשה, והן בדרך כלל קלות יותר. אבל כדאי מאוד לוודא שיודעים איך לפתור אותן, אפילו בעל פה.

שאלה 1. מה סדר ת"ח 2-סילו של חבורה מסדר 80?

פתרון. $80 = 2^4 \cdot 5$ ולכן חבורת 2-סילו היא מגודל 2^4.

שאלה 2. בחר בעזרת משפט קיילי שיכון $U_{12} \hookrightarrow S_4$, ורשום מפורשות את התמונה.

פתרון. נסמן את אברי U_{12} באופן הבא:

$$\begin{aligned} "1" &= 1 \\ "2" &= 5 \\ "3" &= 7 \\ "4" &= 11 \end{aligned}$$

בשיכון כל איבר a הולך לפונקצית הכפל משמאל בa דהיינו $l_a(x) = ax$.
נחשב את התמורה לכל l_a:
עבור 1: הכפל משמאל הוא כמובן העתקת הזהות $l_1 = Id$.

עבור 5: מחשבים ש

$$\begin{aligned} l_5(1) &= 5 \cdot 1 = 5 \\ l_5(5) &= 5 \cdot 5 = 1 \\ l_5(7) &= 5 \cdot 7 = 11 \\ l_5(11) &= 5 \cdot 11 = 7 \end{aligned}$$

לפי הסימונים למעלה זה אומר ש

$$\begin{aligned} "1" &\mapsto "2" \\ "2" &\mapsto "1" \\ "3" &\mapsto "4" \\ "4" &\mapsto "3" \end{aligned}$$

נרשום זאת כתמורה: $(12)(34)$
עבור 7: נחשב

$$\begin{aligned} l_7(1) &= 7 \cdot 1 = 7 \\ l_7(5) &= 7 \cdot 5 = 11 \\ l_7(7) &= 7 \cdot 7 = 1 \\ l_7(11) &= 7 \cdot 11 = 5 \end{aligned}$$

לפי הסימונים למעלה זה אומר ש

$$\begin{aligned} "1" &\mapsto "3" \\ "2" &\mapsto "4" \\ "3" &\mapsto "1" \\ "4" &\mapsto "2" \end{aligned}$$

נרשום זאת כתמורה: $(13)(24)$.
וכדומה ל11, נגמר לי הכח לכתוב...

שאלה 3. כלי עזר: תהי G חבורה ו H_1, H_2 תת-חבורות שונות מסדר p. הוכיחו כי

$$H_1 \cap H_2 = \{e\}$$

פתרון. נקח $x \in H_1 \cap H_2$, אם $x \neq e$ אז $o(x) = p$.
מכיוון ו H_1, H_2 מסדר p אז נקבל $H_1 = \langle x \rangle = H_2$ בסתירה לכך שהם ת"ח שונות.

שאלה 4. תהי G חבורה סופית. ויהי $g \in G$ איבר מסדר k. אזי שיכון קיילי שולח את g למכפלת מחזורים זרים מאורך k.

פתרון. במשפט קיילי האיבר g הולך לl_g פעולת הכפל משמאל בg.
אם g מסדר k לכל $x \in G$ המסלול של x תחת הפעולה של l_g הוא

$$x \mapsto gx \mapsto g^2x \mapsto \cdots \mapsto g^{k-1}x \mapsto g^kx = x$$

ולכן תורם מחזור מאורך k.
נקח איבר $y \in G$ שלא מופיע במסלול של x אז באותו אופן נקבל מחזור מאורך k.
וכן הלאה...
המחזורים יהיו זרים כי המסלולים הם זרים (הם מחלקות שקילות).

שאלות להגשה

שאלה 5. תהי G חבורה פשוטה מסדר n כאשר $n > 2$. הוכיחו כי קיים שיכון $G \hookrightarrow A_n$.

פתרון. לפי משפט קיילי יש שיכון $G \hookrightarrow S_n$.
נחשוב על G בתור ת"ח של S_n ונתבונן ב $G \cap A_n \lhd G$.
G פשוטה ולכן $G \cap A_n = 1, G$.
לפי משפט האיזומורפיזם השני $G/G \cap A_n \cong GA_n/A_n \leq S_n/A_n$
ולכן $[G\colon G \cap A_n] \leq [S_n\colon A_n] = 2$.
מכיוון ו $|G| = n > 2$ לא ייתכן ש $G \cap A_n = 1$
ולכן בהכרח $G \cap A_n = G$ מה שאומר ש $G \subseteq A_n$.

שאלה 6. נתבונן בחבורת הסימטריה S_p עבור p מספר ראשוני.

א) כמה איברים מסדר p יש בחבורה?

ב) חשבו בעזרת סעיף א' את מספר התת-חבורות מסדר p בS_p.

ג) היעזרו בסעיף הקודם כדי להוכיח כי לכל מספר ראשוני p מתקיים

$$(p-1)! \equiv (-1) \mod p$$

זהו משפט וילסון.

פתרון.

א) כל האיברים מסדר p הם רק מחזורים מאורך p ויש בדיוק $(p-1)! = \frac{p!}{p}$ כאלה.

ב) נשים לב שכל איבר מסדר p נמצא בת"ח מסדר p, ובכל ת"ח כזו יש $p-1$ איברים מסדר p.
בנוסף, לפי התרגיל חימום הת"ח האלו נחתכות טריוויאלית ולכן אם יש k ת"ח כאלו אז יש $k(p-1)$ איברים מסדר p.
לפי סעיף א' $k(p-1)=(p-1)!$ כלומר יש $k=(p-2)!$ ת"ח כאלו.

ג) הת"ח מגודל p הם ת"ח p-סילו של S_p ולכן $n_p=(p-2)!\equiv 1 \pmod p$.
נכפול ב $p-1$ ונקבל $(p-1)!\equiv (p-1) \pmod p \equiv (-1) \pmod p$ כדרוש.

שאלה 7. א) תהי $H\leq G$ תת-חבורה ו$P\leq H$ תת-חבורה p-סילו של H. הוכיחו כי קיימת P' תת-חבורה p-סילו של G כך ש- $P'\cap H=P$.

ב) תהי $H\lhd G$ תת-חבורה נורמלית בG. ותהי P תת-חבורה p-סילו של G. הוכיחו כי $H\cap P$ היא תת-חבורה p-סילו של H. בפרט $n_p(H)\leq n_p(G)$.

פתרון. א) P היא תת-חבורה p של G ולכן מוכלת באיזושהי ת"ח p-סילו $P\subseteq P'$.
אזי $P\subseteq P'\cap H$ ולמעשה יש שיוויון כי $P'\cap H$ היא ת"ח p של H ולכן ממקסימליות של P יש שיוויון.

ב) ברור ש $H\cap P$ היא חבורת p. לפי המקסימליות של p-סילו יש $H\cap P\subseteq P'\leq H$ כך ש P' היא p-סילו של H.
מצד שני P' מוכלת באיזושהי ת"ח p-סילו של G ולכן $P'\subseteq gPg^{-1}$ לאיזשהו $g\in G$ (לפי משפט סילו השני) ואז $g^{-1}P'g\subseteq P$.
נתון ש H נורמלית ולכן $P'\leq H \Leftarrow g^{-1}P'g\leq g^{-1}Hg=H$ וביחד נקבל $g^{-1}P'g\subseteq H\cap P$.
אך $|P'|=|g^{-1}P'g|$ ולכן גם $g^{-1}P'g$ היא p-סילו של H וממקסימליות של ת"ח p- סילו נקבל ש $H\cap P$ היא p-סילו של H (כי היא חבורת p המכילה את $g^{-1}P'g$).

שאלה 8. תהי G חבורה מסדר p^2q עבור מספרים ראשוניים שונים p,q.
בעזרת השאלה 3 בחימום, הוכיחו כי G אינה פשוטה.

פתרון. נניח בשלילה ש G כזאת פשוטה.
לפי משפט סילו השלישי $n_q \mid p^2$ ומכיוון שG פשוטה אז $n_q=p,p^2$.
נניח $n_q=p^2$, ת"ח q-סילו הן מסדר q ולכן לפי התרגיל בחימום נחתכות טריוויאלית, כך שנקבל שיש בG בדיוק $(q-1)p^2$ איברים מסדר p.
זה משאיר $p^2q-(q-1)p^2=p^2$ איברים בחבורה, מספיק רק בשביל חבורת p-סילו יחידה, ולכן נורמלית וG לא פשוטה.
נניח $n_q=p$ זה אומר לפי משפט סילו השלישי ש $n_q=p\equiv 1 \pmod q$ ואז בהכרח $q\not\equiv 1 \pmod p$ ולכן $n_p=1$ ונורמלית ושוב G לא פשוטה.

שאלה 9. א) תהי G חבורה מסדר pq עבור מספרים ראשוניים $p > q$ שונים כך ש $p \not\equiv 1 \mod q$. הוכיחו כי G צקלית.
(הדרכה: חשבו n_p, n_q והסיקו כמה איברים יש מכל סדר בחבורה).

ב) תהי G חבורה מסדר 55 שיש בה יותר מ4 איברים מסדר 5. הוכיחו כי G אינה אבלית.

פתרון. א) לפי לגראנז' האיברים בחבורה הם מסדר $1, p, q, pq$.
לפי משפט סילו השלישי והנתונים $n_p = 1$ ו$n_q = 1$ ולכן יש בדיוק $p - 1$ איברים מסדר p ובדיוק $q - 1$ איברים מסדר q, וכמובן רק איבר אחד מסדר 1 .
אם כן ספרנו $p + q - 1 < pq$ איברים, אז חייב להיות בG איבר מסדר pq מה שאומר שהיא צקלית.

ב) חבורת 5-סילו של G היא מגודל 5. כל האיברים מסדר 5מוכלים בחבורת 5-סילו.
אם הייתה רק חבורת 5-סילו אחת אז היו רק $5 - 1 = 4$ איברים מסדר 5 אבל נתון שיש יותר ולכן בהכרח יש יותר מחבורת 5-סילו אחת ולכן היא לא נורמלית.
אך בחבורה אבלית כל הת"ח הן נורמליות- ולכן נובע שG לא אבלית.

שאלה 10. תהי G חבורה מסדר 12 ויהיו n_2 ו-n_3 מספר התת-חבורות 2-סילו ו 3-סילו בהתאמה.

א) מהם ערכי n_2 האפשריים? (הביאו דוגמאות לכך שערכים אלו אכן אפשריים).

ב) מהם ערכי n_3 האפשריים? (הביאו דוגמאות לכך שערכים אלו אכן אפשריים).

ג) האם יתכן ש $n_2 = 3$ ו $n_3 = 4$?

פתרון. א) לפי משפט סילו השלישי $n_2 \mid 3$ ולכן $n_2 = 1, 3$.
נראה ששתי האופציות אפשריות:
החבורה $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3$ היא מסדר 12 והת"ח $\mathbb{Z}_4 \times \{0\}$ היא 2-סילו והיא נורמלית ולכן יחידה.
החבורה D_6 היא מסדר 12 ותת-החבורה $\langle \tau, \sigma^6 \rangle$ היא מסדר 4 ולכן 2-סילו, היא לא נורמלית ולכן בהכרח $n_2 = 3$ במקרה הזה.

ב) לפי משפט סילו השלישי $n_3 \mid 4$ ו $n_3 \equiv 1 \pmod 3$ ולכן $n_3 = 1, 4$.
נראה ששתי האופציות אפשריות:
החבורה $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3$ היא מסדר 12 והת"ח $\{0\} \times \mathbb{Z}_3$ היא 3-סילו והיא נורמלית ולכן יחידה.
החבורה A_4 היא מסדר 12 ותת-החבורה $\langle (123) \rangle$ היא 3-סילו ולא נורמלית (למשל לא סגורה להצמדה באיבר $(12)(34) \in A_4$) ולכן $n_3 = 4$.

ג) נניח ש $n_2 = 3$ ו $n_3 = 4$ בחבורה G.
נספור איברים:

מספר האיברים	סדר
1	1
$(3-1)*4 = 8$	3
?	2 או 4

יש 4 חבורות 3-סילו והן נחתכות טריוויאלית (ראה את שאלת החימום) ומלבד איבר היחידה שאר האיברים בהם הם מסדר 3. מכיוון שכל איבר מסדר 3 נמצא באיזושהי חבורת 3-סילו יש לנו בדיוק 8 איברים מסדר 3.
בחבורה נשארו $12-8-1=3$ איברים, זה משאיר לנו מקום רק לחבורת 2-סילו אחת.
ולכן לא ייתכן ש $n_3 = 4, n_2 = 3$.

שאלה 11. הוכיחו כי אין חבורה פשוטה מסדר 150.
רמז: היעזרו במשפט העידון של קיילי.

פתרון. נניח בשלילה ש G חבורה פשוטה מסדר 150.
נפרק $150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$
לפי משפט סילו השלישי $n_5 \mid 6$ ו $n_5 \equiv 1 \pmod 5$ ולכן $n_5 = 1, 6$.
הנחנו ש G פשוטה ולכן $n_5 = 6$ בהכרח.
תהי Q ת"ח 5-סילו, אזי $[G\colon N_G(Q)] = n_5 = 6$ ולכן לפי העידון של קיילי יש שיכון

$$G \hookrightarrow S_6$$

(זהו דוקא שיכון כי הנחנו שהחבורה פשוטה).
זה נותן לפי לגראנז ש $150 \mid 6!$ וזו סתירה!

שאלות רשות

את שאלות הרשות אין חובה לפתור, אבל אם פתרתם אותן, בבקשה צרפו את הפתרון שלהן.

שאלה 12. בשאלה זו נוכיח את משפט סילו הראשון בדרך אחרת:

א) הוכיחו כי כל חבורה סופית מסדר n ניתן לשכן ב $GL_n(\mathbb{Z}_p)$ (רמז: מטריצת פרמוטציה).

ב) הוכיחו כי אם לחבורה G סופית יש ת"ח p-סילו, אז גם לת"ח $H \leq G$ יש ת"ח p-סילו.
(הנחייה: הסתכלו על הפעולה של H על המנה של G עם ת"ח p-סילו Q ע"י כפל

משמאל.
הראו שהמייצב $Stab(gQ) = H \cap gQg^{-1}$ ומצאו ת"ח סילו מבין המייצבים.).

ג) מצאו ל $GL_n(\mathbb{Z}_p)$ ת"ח p-סילו.

ד) הסיקו: לכל חבורה סופית יש ת"ח p-סילו.

פתרון. א) כעיחכיחכ

ב) תהי Q ת"ח p-סילו של G. H פועלת על G/Q ע"י כפל משמאל.
המייצב של איבר הוא

$$\begin{aligned} Stab(gQ) &= \{h \in H \,|\, hgQ = gQ\} = H \cap \{x \in G \,|\, xgQ = gQ\} \\ &= H \cap \left\{x \,\middle|\, g^{-1}xg \in Q\right\} = H \cap \left\{x \,\middle|\, x \in gQg^{-1}\right\} = H \cap gQg^{-1} \end{aligned}$$

כעת, מכיוון וG/Q הוא מסדר זר לp והוא סכום המסלולים, חייב להיות מסלול מגודל זר לp (אחרת נקבל סתירה לפי משוואת המחלקות).
נקח איבר gQ ממסלול כזה, אזי $|Stab(gQ)| = \dfrac{|H|}{|orb(gQ)|}$

ג) השלם..

שאלה 13. תהי G חבורה מסדר n. הוכיחו כי שיכון $G \hookrightarrow S_n$ הניתן ע"י משפט קיילי אינו שיכון לתוך A_n אם ורק אם ת"ח 2-סילו של G היא ציקלית ולא טריוויאלית.
הנחייה: ראו תרגיל 4 בחימום.

פתרון. dghfdh
השלם...

בהצלחה!