בס"ד

תרגול נומריות (7)

פירוק Cholesky

הגדרה: תהי A מטריצה. ל-A יש פירוק Chol אם:

① $A^t = A$

② A מטריצה חיובית לחלוטין:

שקולים:
- I. לכל ע"ע λ, $\lambda > 0$
- II. כל המינורים הראשיים של A חיוביים
- III. $\forall \vec{x} \neq 0$, $\vec{x}^t A \vec{x} > 0$

דוגמה למינורים הראשיים:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$|2| = 2 > 0$

$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0$

$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 8 - (2+2) = 4 > 0$

$\Longrightarrow$ למטריצה זו יש פירוק Chol.
(פקודה במטלב- chol(m))

משפט: ניתן לפרק מטריצה A סימטרית וחיובית באופן הבא:

נבצע פירוק LU: (נסמן $U = \underset{\text{אלכסונית}}{D} + \underset{\text{השאר}}{U_1}$)

$$A = \underbrace{(L\sqrt{D})}_{R}(L\sqrt{D})^t = R \cdot R^t$$

(סימון)

$\sqrt{D}$ עבור מט' אלכסונית = שורש איבר איבר

ע"מ למצוא פתרון של המערכת $A\vec{x} = \vec{b}$

$$R \cdot \underbrace{R^t \cdot \vec{x}}_{\text{נסמן } y} = \vec{b} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} ① & R\vec{y} = \vec{b} \\ ② & R^t \vec{x} = \vec{y} \end{cases}$$

ע"מ למצוא פתרון (כלומר את $\vec{x}$) נבצע חילוץ לפנים ולאחור ונמצא את $\vec{x}$.

דוגמה:

$$A=\begin{pmatrix}1&4&5\\4&20&32\\5&32&64\end{pmatrix}$$

① A סימטרית כי $A^t=A$ ✓

② נבדוק חיוביות מינורים ראשיים:

$$|1|=1>0$$

$$\begin{vmatrix}1&4\\4&20\end{vmatrix}=20-16>0$$

$$\begin{vmatrix}1&4&5\\4&20&32\\5&32&64\end{vmatrix}=12>0$$

✓

נבצע פירוק LU:

$$A=\begin{pmatrix}1&4&5\\4&20&32\\5&32&64\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3:R_3-5R_1]{R_2:R_2-4R_1}\begin{pmatrix}1&4&5\\0&4&12\\0&12&39\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3:-3R_2+R_3}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1&4&5\\0&4&12\\0&0&3\end{pmatrix}=U$$

נשמור את כל פעולות השורה על המטריצה A

(פעולת שורה $\Leftrightarrow$ הכפלת A במטריצה אלמנטרית)

$$\underline{R_2:R_2-4R_1}\qquad\underline{R_3:R_3-5R_1}\qquad\underline{R_3:R_3-3R_2}$$

$$E_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\-4&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\to E_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-5&0&1\end{pmatrix}\to E_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-3&1\end{pmatrix}$$

$$E_1^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\4&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\quad E_2^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\5&0&1\end{pmatrix}\quad E_3^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&3&1\end{pmatrix}$$

$$E_3E_2E_1A=U\ /\cdot(E_3E_2E_1)^{-1}\Rightarrow A=(E_3E_2E_1)^{-1}U$$

$$\Rightarrow A=\underbrace{E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}}_{L}U$$

בס"ד

נומריות (תרגול 7)

המשך:

$$L = E_1^{-1} E_2^{-1} E_3^{-1}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$* \; L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

<u>כלל אצבע:</u> בפירוק LU במטריצה L האלכסון הראשי הוא 1-ים.

$$U = D + U_1$$

$$U = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{D} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{U_1}$$

$$R = L \cdot \sqrt{D}, \quad \sqrt{D}$$

$$\sqrt{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \Rightarrow R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 5 & 6 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

ע"מ לפתור מערכת:

$$A\vec{x} = \vec{b}, \quad A = RR^t$$

$$\Rightarrow R \cdot \underbrace{R^t \vec{x}}_{y} = \vec{b}$$

$$R^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

(הצבה קדימה ①
*הצבה אחורה
ב②

① $R\vec{y} = \vec{b} \rightarrow$ וקטור העזר

② $R^t\vec{x} = \vec{y}$

שיטות איטרטיביות למציאת וקטור פתרונות

רעיון: ניקח את המערכת $A\vec{x}=\vec{b}$ ונמצא קירוב איטרטיבי לווקטור $\vec{x}$ ע"י: $\vec{x}_{k+1}=B\vec{x}_{k+1}+\vec{c}$; כאשר B מטריצה ו-C - וקטור.

(ניתן לכתוב A מטריצה ע"י $A=L+D+U$)

משולשית תחתונה, אלכסונית, משולשית עליונה

שיטת יעקובי:

$$A=(L+U)+D\ ,\ A\vec{x}=\vec{b}$$

$$[(L+U)+D]\vec{x}=\vec{b}$$

$$(L+U)\vec{x}+D\vec{x}=\vec{b}$$

$$D\vec{x}=\vec{b}-(L+U)\vec{x}\ /\cdot D^{-1}$$

$$\boxed{\vec{x}=-D^{-1}(L+U)\vec{x}+D^{-1}\vec{b}} \longleftarrow \text{יעקובי}$$

$$\vec{x}_{new}=-D^{-1}(L+U)\vec{x}_{old}+D^{-1}\vec{b}$$

$$\vec{x}_{k+1}=-D^{-1}(L+U)\vec{x}_{k}+D^{-1}\vec{b}$$

$$B=?\quad B=-D^{-1}(L+U)$$

$$C=?\quad C=D^{-1}B$$

נדרוש:

$$D=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$D^{-1}=?\ ,\ \forall_i\ a_i\neq 0 \Rightarrow a_{11}\cdots a_{nn}\neq 0$$

ב"ה

המשך תרגול 7 - נומריות

<u>משפט התכנסות:</u> תנאי מספיק-אבל לא הכרחי.

אם A מטריצה בעלת <u>תנאי אלכסון שולט</u> אז השיטה האיטרטיבית תתכנס לכל ניחוש התחלתי ($\vec{x}_0$) ולכן ל $A\vec{x}=\vec{b}$ יש פתרון יחיד.

<u>אלכסון שולט:</u>

$$\forall i \quad |a_{ii}| > \sum_{i\neq j} |a_{ij}|$$

<u>דוגמה</u>

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 8 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} |3|>|-1|+|-1| \\ |2|>|0|+|-1| \\ |8|>|1|+|1| \end{matrix}$$

לכן תנאי זה מתקיים (האלכסון שולט)

<u>משפט התכנסות נוסף:</u> תנאי מספיק ~~אבל~~ ולא הכרחי

(אם למטריצה A אין אלכסון שולט זה לא אומר שאין התכנסות לשיטה האיטרטיבית)

① $\|B\| < 1$ L_1, L_2, L_3

② $|I-B| \neq 0$

<u>נורמה ב-L_1:</u> המקסימום של סכומי העמודות עבור הערכים המוחלטים של המטריצה.

<u>נורמה ב-L_2:</u> סכום הע"ע המוחלטים של $A\cdot A^t$.

<u>נורמה ב-L_∞:</u> כמו L_1 עבור שורות

$$\vec{x}_{k+1} = B\vec{x}_k + C$$

$$\vec{x}_{k+1} - \vec{x}_k = B\vec{x}_k + \cancel{C} - (B\vec{x}_{k-1} + \cancel{C})$$

$$\|\vec{x}_{k+1} - \vec{x}_k\| = \|B(\vec{x}_k - \vec{x}_{k-1})\| \le \|B\| \cdot \|\vec{x}_k - \vec{x}_{k-1}\|$$

לכן נדרוש $\|B\|<1$.

דוגמה:

$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 &= 2 \\ 2x_1 + 10x_2 + 4x_3 &= 6 \\ 4x_2 + 5x_3 &= 5 \end{aligned}$$

נתון התחלתי $(0,0,0)$

1. הוכח שהשיטה מתכנסת בשיטת יעקובי
2. כתוב נוסחה איטרטיבית למציאת הקירוב
3. בצע 6 איטרציות

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 10 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} |4| &> |2| + |0| \\ |10| &> |2| + |4| \\ |5| &> |4| + |0| \end{aligned}\right\}$$

לכן יש אלכסון שולט.

$\Downarrow$

השיטה מתכנסת.

$$A = L + D + U \Rightarrow D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad L + U = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = -D^{-1}(L+U), \quad D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$$B = -\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & & \\ & \frac{1}{10} & \\ & & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0.8 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = D^{-1}\vec{b} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0.8 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.6 \\ 1 \end{pmatrix}$$