שיעורי בית 1

.

1. הציגו את התמורות הבאות באמצעות מחזורים זרים.

(א) $a=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\in S_6$

(ב) $b=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 6 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}\in S_6$

(ג) חשבו: $a^2\ ,b^2,bab^{-1},ab$

(ד) כמה תמורות $x\in S_6$ קיימות המקיימות את השיוון $ax=b$? מצאו אותן.

2. חשבו:

(א) $((1,2,3)(2,5,3)(1,4))^4$

(ב) $((1,3,5,2,4,7)(6,8))^5$

3. תהא $\sigma\in S_n$. ויהא $\sigma=\tau_1\cdots\tau_m$ ההצגה שלה כמכפלה של מחזורים זרים. הוכיחו כי

(א) $\sigma^{-1}=\tau_1^{-1}\cdots\tau_m^{-1}$

(ב) $\sigma^k=\tau_1^k\cdots\tau_m^k$ לכל k טבעי.

(ג) תנו דוגמא ל$\sigma\in S_n$ שניתן להציגה כמכפלה של מחזורים (לא בהכרח זרים) $\sigma=\tau_1,\dots,\tau_m$ כך ש:

i. $\sigma^{-1}\neq\tau_1^{-1}\cdots\tau_m^{-1}$

ii. קיים k טבעי כך ש $\sigma^k\neq\tau_1^k\cdots\tau_m^k$

4.

(א) הוכיחו פורמאלית כי עבור מחזור $(i_1,\ldots,i_m)\in S_n$ מתקיים כי

$$(i_1,\ldots,i_m)=(i_1,i_2)\,(i_2i_3)\ldots(i_{m-1}i_m)$$

הוכיחו זאת ע"י בדיקה מפורשת כי לכל $x\in\{1,\ldots,n\}$ מתקיים כי

$$(i_1,\ldots,i_m)\,[x]=(i_1,i_2)\,(i_2i_3)\ldots(i_{m-1}i_m)\,[x]$$

(ב) הראו כי לכן כל תמורה $\sigma\in S_n$ ניתנת להצגה כמכפלה של חילופים, וכי הצגה זאת אינה יחידה.

5. תהי $\sigma\in S_n$ תמורה. נגדיר את התומך שלה להיות:

$$\mathrm{supp}(\sigma)=\{i|\sigma(i)\neq i\}$$

במילים: אוסף המספרים שאותם σ"מזיזה". נאמר ששתי תמורות, σ,τ, הן זרות אם $\mathrm{supp}(\sigma)\cap\mathrm{supp}(\tau)=\varnothing$.

(א) תנו דוגמא לתמורות לא זרות שאינן מתחלפות.

(ב) תנו דוגמא לתמורות לא זרות שמתחלפות.

(ג) הוכיחו שאם $i\in\mathrm{supp}(\sigma)$ אז גם $\sigma(i)\in\mathrm{supp}(\sigma)$.

6. עבור $\sigma\in S_n$ ומחזור $(i_1,i_2,\ldots i_m)\in S_n$ הוכיחו כי מתקיים השיוויון הבא:

$$\sigma\,(i_1,i_2,\ldots i_m)\,\sigma^{-1}=(\sigma(i_1),\sigma(i_2),\ldots,\sigma(i_m))$$

למשל, אם $\sigma=(1,2)\,(4,5)$ מתקיים כי

$$\sigma\,(2,3,5,6)\,\sigma^{-1}=(1,3,4,6)$$

7. תרגיל מודרך: טענה־ קיימות $\sigma_1,\sigma_2\in S_n$ כך שכל $\sigma\in S_n$ ניתן להציג כמכפלה שלהם והופכיהם.
כלומר $\sigma=\prod_{i=1}^{N}\tau_i$ כאשר לכל i מתקיים $\tau_i\in\left\{\sigma_1,\sigma_1^{-1},\sigma_2,\sigma_2^{-1}\right\}$.
אנחנו נעבוד עם $\sigma_1=(1,2,3,\ldots,n)\,,\sigma_2=(1,2)$.

(א) הראו כי כל חילוף מהצורה $(1,i)$ ניתן להציגו ע"י σ_1,σ_2 והופכיהן. (רמז: שאלה 6 יכול להיות לעזר)

(ב) הראו שכל חילוף (i,j) ניתן להביעו בעזרת $\{(1,k)\}_{k>2}$

(ג) הוכיחו את הטענה.