אוניברסיטת בר אילן, המחלקה למתמטיקה

בוחן בקורס: משוואות דיפרנציאליות לכלכלנים 88-625-01

מרצה הקורס: ד"ר יעקוב קרסנוב
מתרגל הקורס: ד"ר אפי כהן

סמסטר א, תשע"ה ו בטבת תשע"ה, 28.12.14

משך הבוחן: שעה וחצי

חומר עזר מותר ללא הגבלה אך השימוש במחשב נייד\טאבלט <u>אסור בהחלט</u>.

יש לענות **<u>בפירוט</u>** על 3 מתוך 4 השאלות.
אם פתרתם את כל השאלות – נא לציין 3 שאלות לבדיקה,
אחרת תיבדקנה 3 השאלות הראשונות.
כל השאלות שוות משקל. נא להסביר ולנמק בבירור את הפתרונות.

<u>שאלה 1</u>

א. מצאו את הפתרון הכללי של המד"ר $xy'-y=x^2\cos x$.

ב. מצאו את הפתרון הכללי של המד"ר $y'=\dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2}$.

<u>פתרון שאלה 1</u>

<u>סעיף א</u>

$$xy'-y=x^2\cos x \Rightarrow y'-\frac{1}{x}y=x\cos x.$$

קיבלנו משוואה ליניארית מסדר ראשון. נמצא את הפתרון הכללי של המשוואה ההומוגנית.

$$y'-\frac{1}{x}y=0 \Rightarrow \frac{dy}{y}=\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln y=\ln x+\ln c \Rightarrow y=cx.$$

נמצא פתרון פרטי למשוואה הלא הומוגנית. על פי שיטת וריאציית הפרמטרים הפתרון הפרטי הוא מהצורה $y=c(x)x \Rightarrow y'=xc'(x)+c(x)$.

נציב במשוואה $y'-\frac{1}{x}y=x\cos x$ ונקבל

$$xc'(x)+c(x)-c(x)=x\cos x \Rightarrow c'(x)=\cos x \Rightarrow c(x)=\sin x.$$

הפתרון הפרטי הוא $y=x\sin x$.

תשובה: $y=cx+x\sin x$.

<u>סעיף ב</u>

נשים לב שהמשוואה $y'=\frac{x^2+xy+y^2}{x^2}$ הומוגנית מסדר 1.

נציב $y=ux \Leftarrow y'=u'x+u$

$$u'x+u=\frac{x^2+ux^2+u^2x^2}{x^2} \Leftarrow u'x+u=1+u+u^2 \Leftarrow u'x=1+u^2.$$

סה"כ נקבל

$$\frac{du}{1+u^2}=\frac{dx}{x} \Leftarrow \arctan u=\ln x+c \Leftarrow \frac{y}{x}=\tan(\ln x+c) \Leftarrow y=x\tan(\ln x+c)$$

<u>שאלה 2</u>

נתונה משוואה דיפרנציאלית $dx+\left(\frac{x}{y}-\sin y\right)dy=0$.

א. הראה שהמשוואה לא מדויקת ומצא את הגורם האינטגרציוני.

ב. פתור את המשוואה הדיפרנציאלית הנתונה.

<u>פתרון שאלה 2</u>

<u>סעיף א</u>

$M(x,y)=1 \Leftarrow M_y=0, N(x,y)=\frac{x}{y}-\sin y \Leftarrow N_x=\frac{1}{y}$ מכיוון ש $M_y\neq N_x$ המשוואה לא מדויקת. נמצא את הגורם האינטגרציוני $f(x,y)$ כלומר:

$$f'_yM+fM'_y=f'_xN+fN'_x \Leftarrow f'_y=f'_x\left(\frac{x}{y}-\sin y\right)+f\cdot\frac{1}{y}.$$

נניח שהגורם האינטגרציוני הוא פונקציה של y בלבד ואז $f'_x=0$.

סה"כ נקבל $f'_y=f\cdot\frac{1}{y} \Leftarrow f(y)=y$ גורם אינטגרציוני.

<u>סעיף ב</u>

על פי סעיף א יש לפתור את המשוואה המדויקת $ydx+(x-y\sin y)dy=0$.

נמצא את הדיפרנציאל השלם $u(x,y)$. מכיוון ש $u'_x=y$ נקבל ש

$u(x,y)=xy+c(y) \Leftarrow u'_y=x+c'(y)$ ז"א

$$x+c'(y)=x-y\sin y \Leftarrow c'(y)=-y\sin y \Leftarrow c(y)=y\cos y-\sin y.$$

$u(x,y)=xy+y\cos y-\sin y$ והפתרון הוא $xy+y\cos y-\sin y=c$.

<u>שאלה 3</u>

א. מצא פתרון כללי למשוואה הדיפרנציאלית $y''+4y=0$.

ב. מצא פתרון כללי למשוואה הדיפרנציאלית $y''+4y=\frac{1}{\cos(2x)}$.

<u>פתרון שאלה 3</u>

<u>סעיף א</u>

הפולינום האופייני הוא $\lambda^2+4=0 \Leftarrow \lambda_1=2i, \lambda_2=-2i$ ואז הפתרון הכללי של המשוואה הוא $y=c_1\cos(2x)+c_2\sin(2x)$.

סעיף ב

נפתור בעזרת וריאצית הפרמטרים.

הפתרון הוא מהצורה

$y'=c_1'(x)\cos(2x)-2c_1(x)\sin(2x)+c_2'(x)\sin(2x)+2c_2(x)\cos(2x) \Leftarrow y=c_1(x)\cos(2x)+c_2(x)\sin(2x)$

נניח שהפתרון מקיים את המשוואה $c_1'(x)\cos(2x)+c_2'(x)\sin(2x)=0$ ואז

$y'=-2c_1(x)\sin(2x)+2c_2(x)\cos(2x)$. נגזור שוב ונקבל

$y''=-2c_1'(x)\sin(2x)-4c_1(x)\cos(2x)+2c_2'(x)\cos(2x)-4c_2(x)\sin(2x)$.

נציב במשוואה $y''+4y=\frac{1}{\cos(2x)}$ ונקבל $y''+4y=\frac{1}{\cos(2x)}$

$-2c_1'(x)\sin(2x)+2c_2'(x)\cos(2x)=\frac{1}{\cos(2x)}$

יש לפתור את המערכת $\begin{cases} c_1'(x)\cos(2x)+c_2'(x)\sin(2x)=0 \\ -2c_1'(x)\sin(2x)+2c_2'(x)\cos(2x)=\dfrac{1}{\cos(2x)} \end{cases}$.

על פי כלל קרמר $c_1(x)=\frac{1}{4}\ln(\cos(2x)) \Leftarrow c_1'(x)=-\frac{\tan(2x)}{2} \Leftarrow c_1'(x)=\dfrac{\left|\begin{pmatrix} 0 & \sin(2x) \\ \frac{1}{\cos(2x)} & 2\cos(2x) \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} \cos(2x) & \sin(2x) \\ -2\sin(2x) & 2\cos(2x) \end{pmatrix}\right|}$

$c_2(x)=\frac{x}{2} \Leftarrow c_2'(x)=\frac{1}{2} \Leftarrow c_2'(x)=\dfrac{\left|\begin{pmatrix} \cos(2x) & 0 \\ -2\sin(2x) & \frac{1}{\cos(2x)} \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} \cos(2x) & \sin(2x) \\ -2\sin(2x) & 2\cos(2x) \end{pmatrix}\right|}$

הפתרון הפרטי הוא $y=\frac{1}{4}\cos(2x)\ln(\cos(2x))+\frac{1}{2}x\sin(2x)$.

הפתרון הכללי הוא $y=c_1\cos(2x)+c_2\sin(2x)+\frac{1}{4}\cos(2x)\ln(\cos(2x))+\frac{1}{2}x\sin(2x)$.

שאלה 4

א. מצא פתרון כללי למערכת המשוואות $\begin{cases} y_1'=-y_1-2y_2 \\ y_2'=4y_1+3y_2 \end{cases}$.

ב. מצא פתרון פרטי כאשר תנאי ההתחלה הוא $\vec{y}(0)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.

פתרון שאלה 4

סעיף א

נמצא את הערכים העצמיים של המטריצה $A=\begin{pmatrix}-1 & -2 \\ 4 & 3\end{pmatrix}$.

$$|\lambda I-A|=\left|\begin{pmatrix}\lambda+1 & 2 \\ -4 & \lambda-3\end{pmatrix}\right|=(\lambda+1)(\lambda-3)+8=\lambda^2-2\lambda+5=(\lambda-1)^2+4$$

$\lambda_1=1+2i,\lambda_2=1-2i$.

הפתרון הוא מהצורה $e^{(1+2i)x}=e^x(\cos(2x)+i\sin(2x))$.

נמצא את הווקטור העצמי שמתאים לערך עצמי $\lambda=1+2i$.

נמצא בסיס למרחב האפס של המטריצה $\begin{pmatrix} 2+2i & 2 \\ -4 & -2+2i \end{pmatrix}$.

מכיוון שדרגת המטריצה 1 מספיק למצוא בסיס למרחב הפתרונות של המשוואה $(2+2i)x+2y=0$ נבחר $x=1$ ואז $y=-1-i$ ז"א $\begin{pmatrix} 1 \\ -1-i \end{pmatrix}$.

הפתרון הוא מהצורה

$$e^x\begin{pmatrix} 1 \\ -1-i \end{pmatrix}(\cos(2x)+i\sin(2x)) \Rightarrow \begin{matrix} e^x(\cos(2x)+i\sin(2x)) \\ e^x(-\cos(2x)+\sin(2x)+i(-\cos(2x)-\sin(2x))) \end{matrix}$$

מכיוון שאם $f(x)+ig(x)$ פתרון של משוואה הומוגנית אז $c_1 f(x)+c_2 g(x)$ פתרון של המשוואה נקבל שהפתרון הוא

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} e^x\cos(2x) \\ e^x(-\cos(2x)+\sin(2x)) \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} e^x\sin(2x) \\ -e^x(\cos(2x)+\sin(2x)) \end{pmatrix}.$$

<u>סעיף ב</u>

נתון ש $\vec{y}(0)=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ מהפתרון של סעיף א נקבל את המשוואות $\begin{matrix} c_1 = 1 \\ -c_1-c_2=0 \end{matrix}$

כלומר $\begin{matrix} c_1 = 1 \\ c_2 = -1 \end{matrix}$ ואז הפתרון הוא $\begin{matrix} y_1 = e^x\cos(2x)-e^x\sin(2x) \\ y_2 = 2e^x\sin(2x) \end{matrix}$.