לינארית להנדסה- פתרון תרגיל 3

תרגיל 1. מרוכבים

1. הוכח שלכל מספר מרוכב z מתקיים $z^{-1}=\frac{\bar{z}}{|z|^2}$

פתרון.

כדי לבדוק שזה באמת נכון נחשב את zz^{-1} ונראה שהוא באמת שווה ל-1

$$zz^{-1}=z\cdot\frac{\bar{z}}{|z|^2}=\frac{z\bar{z}}{|z|^2}=\frac{|z|^2}{|z|^2}=1$$

לכן ההופכי של zהוא $\frac{\bar{z}}{|z|^2}$. שימו לב שאם $z=0$ ההופכי לא קיים!

2. חשב את $\left(i+\left(i+(i+1)^{-1}\right)^{-1}\right)^{-1}$

פתרון.
לפי הסעיף הקודם

$$(i+1)^{-1}=\frac{1-i}{2}$$

לכן

$$\left(i+\left(i+(i+1)^{-1}\right)^{-1}\right)^{-1}=\left(i+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)^{-1}\right)^{-1}$$

שוב לפי הסעיף הקודם

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)^{-1}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i}{\frac{1}{2}}=1-i$$

לכן

$$\left(i+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)^{-1}\right)^{-1}=(i+1-i)^{-1}=1^{-1}=1$$

3. חשב את $\left(1+i+i^2+i^3+\ldots+i^{34}\right)^{71}$

פתרון.
תחילה נחשב את הסכום

$$1+i+i^2+i^3+\ldots+i^{34}$$

נשים לב ש-

$$1+i+i^2+i^3=0$$

ובאופן כללי

$$i^{4n}+i^{4n+1}+i^{4n+2}+i^{4n+3}=0$$

מכאן

$$1+i+i^2+i^3+\ldots+i^{34}=i^{32}+i^{33}+i^{34}=\left(i^4\right)^8+\left(i^4\right)^8 i+\left(i^4\right)^8 i^2=1+i-1=i$$

לכן

$$\left(1+i+i^2+i^3+\ldots+i^{34}\right)^{71}=i^{71}=\left(i^4\right)^{17} i^3=-i$$

4. הציגו את המספרים הבאים בהצגה קוטבית

(א) $1+i$

פתרון.
נחשב את r,θ לפי הנסחאות מהתרגול

$$r=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$$

ו-

$$\tan\theta=\frac{1}{1}\rightarrow\theta=\frac{\pi}{4}$$

לכן

$$1+i=\sqrt{2}cis\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

(ב) $-\frac{1}{\sqrt{3}}-i$

פתרון.
נחשב את r,θ לפי הנסחאות מהתרגול

$$r=\sqrt{(-1)^2+\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}=\sqrt{\frac{4}{3}}$$

ו-

$$\tan\theta=\frac{-1}{-\frac{1}{\sqrt{3}}}\rightarrow\tan\theta=\sqrt{3}\rightarrow\theta=\frac{\pi}{3}+\pi=\frac{4\pi}{3}$$

לכן

$$-\frac{1}{\sqrt{3}}-i=\sqrt{\frac{4}{3}}cis\left(\frac{4\pi}{3}\right)$$

תרגיל 2. פתרו את המערכת המשוואות הבאה הבאות

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 4y & + & 5z & = & 6 \\ -x & - & 2y & - & 6z & = & -3 \\ 4x & + & 10y & + & 23z & = & 15 \end{array}\right.$$

פתרון.
נציג את המערכת ונדרג אותה לפי אלגוריתם גאוס.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 5 & 6 \\ -1 & -2 & -6 & -3 \\ 4 & 10 & 23 & 15 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3-1R_1]{R_2+R_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -6 & 3 & -9 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3+3R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

נסמן $z = t$ נקבל $y = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}t$ ו-$x = -7t$, לסיכום יש אינסוף פתרונות והן מהצורה

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7t \\ \frac{3}{2} + \frac{1}{2}t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -7 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

תרגיל 3. עבור אילו ערכי a יש למערכות הבאות פתרון יחיד, אין פתרון או אינסוף פתרונות במקרה כזה הציגו את הפתרון הכללי.

.1
$$\begin{cases} ax + ay - az = a \\ -x + 4y - az = 0 \\ 2x - 8y + 4z = 1 \end{cases}$$

פתרון.
נציג את המערכת ונדרג אותה לפי אלגוריתם גאוס.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & a & -a & a \\ -1 & 4 & -a & 0 \\ 2 & -8 & 4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & -a & 0 \\ a & a & -a & a \\ 2 & -8 & 4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3+2R_1]{R_2+aR_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & -a & 0 \\ 0 & 5a & -a^2-a & a \\ 0 & 0 & 4-2a & 1 \end{array}\right)$$

יש פתרון יחיד כאשר יש 3 איברים פותחים כלומר כאשר $\begin{cases} 5a \neq 0 \\ 4-2a \neq 0 \end{cases} \rightarrow a \neq 0, 2$
$0,2$ יש פתרון יחיד, נציב את המקרים $a = 0, 2$ ונראה מה נקבל

- $a = 0$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

במקרה זה יש אינסוף פתרונות והפתרון הכללי הוא

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4t \\ t \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

- $a = 2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -10 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

במקרה זה אין פתרון היות וקבלנו שורת סתירה.

.2
$$\begin{cases} x & + & y & + & z & = & a \\ ax & + & (2a-2)\,y & + & \left(a^2+a\right) z & = & a^2 \\ -6x & - & 2y-2ya & - & za^2-5az & = & -5a-3 \end{cases}$$

פתרון.
נציג את המערכת ונדרג אותה לפי אלגוריתם גאוס.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ a & 2a-2 & a^2+a & a^2 \\ -6 & -2-2a & -a^2-5a & -5a-3 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{R_2 - aR_1 \\ R_3 + 6R_1}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & a-2 & a^2 & 0 \\ 0 & 4-2a & -a^2-5a+6 & a-3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3+2R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & a-2 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2-5a+6 & a-3 \end{array}\right)$$

יש פתרון יחיד כאשר יש 3 איברים פותחים כלומר כאשר $\rightarrow$ $\begin{cases} a-2 & \neq & 0 \\ a^2-5a+6 & \neq & 0 \end{cases}$
$a \neq 2,3$ יש פתרון יחיד, נציב את המקרים $a = 2,3$ ונראה מה נקבל

- $a = 2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

במקרה זה אין פתרון היות וקבלנו שורת סתירה.

- $a = 3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

במקרה זה יש אינסוף פתרונות והפתרון הכללי הוא

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+8t \\ -9t \\ t \end{pmatrix}$$

תרגיל 4. נתונה המערכת $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ a & a^2 & 1 \\ 1 & 1 & b \end{array}\right)$

1. עבור אילו ערכי b אין למערכת הנ"ל פתרון?
2. ענה על התת סעיפים הבאים עבור ה-b שלא מקיים את הסעיף הקודם (למשל אם בסעיף 1 קבלת שעבור $b \neq 1243$ אין פתרון, אז בסעיף זה אתה צריך לענות על התת סעיפים לאחר שהצבת $b = 1243$).
   (א) עבור אלו ערכי a יש למערכת פתרון יחיד.
   (ב) עבור אילו ערכי a יש למערכת אינסוף פתרונות, ומצא את הפתרון הכללי במקרה זה.
   (ג) עבור אילו ערכי a אין למערכת פתרון.

פתרון.

נדרג את המערכת

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ a & a^2 & 1 \\ 1 & 1 & b \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ a & a^2 & 1 \\ 0 & 0 & b-1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a^2-a & 1-a \\ 0 & 0 & b-1 \end{array}\right)$$

עבור $b - 1 \neq 0 \Rightarrow b \neq 1$ אין פתרון היות ויש סתירה בשורה השלישית. עבור המשך התרגיל נציב

$$b = 1$$

ונקבל את המערכת

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a^2-a & 1-a \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a^2-a & 1-a \end{array}\right)$$

יהיה פתרון יחיד כאשר אברי האלכסון שונים מ-0 כלומר $a^2 - a \neq 0 \to a \neq 1, 0$
כעת נציב את המקרים הללו ונראה מה נקבל

- עבור $a = 1$ המערכת היא

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

במקרה זה יש אינסוף פתרונות, והפתרון הכללי הוא

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- עבור $a = 0$ המערכת היא

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

ובמקרה זה יש שורת סתירה, לכן אין פתרון.

תרגיל 5. נתונות שתי מערכות משוואות (1) $Ax = b_1$ ו- (2) $Ax = b_2$ הוכח או הפרך.(A אינה חייבת להיות ריבועית!)

1. אם למערכת (1) יש אינסוף פתרונות אז גם למערכת (2) יש אינסוף פתרונות.

פתרון.
לא נכון, ניקח את מערכות המשוואות הבאות

$$(1)\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$$
$$(2)\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

למערכת (1)יש אינסוף פתרונות ולמערכת (2)אין פתרון

2. אם למערכת (1) יש פתרון יחיד אז גם למערכת (2) יש פתרון יחיד.

פתרון.
לא נכון, ניקח את מערכות המשוואות הבאות

$$(1)\begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \\ x + z = 0 \\ x + 2z = 0 \end{cases}$$
$$(2)\begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \\ x + z = 0 \\ x + 2z = 1 \end{cases}$$

למערכת (1)יש פתרון יחיד פתרונות ולמערכת (2)אין פתרון. במקרה ו-A ריבועית הטענה נכונה.

3. אם למערכת (1) אין פתרון אז גם למערכת (2) אין פתרון.

פתרון.
לא נכון, ניקח את אותה דוגמא מסעיף 1

תרגיל 6.

1. הוכח שלכל מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ המטריצה $AA^t - A^tA$ היא מטריצה סימטרית.

פתרון.

$$\left(AA^t - A^tA\right)^t = \left(AA^t\right)^t - \left(A^tA\right)^t = \left(A^t\right)^t A^t - A^t\left(A^t\right)^t = AA^t - A^tA$$

2. הוכח שלכל מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ המטריצה $A - A^t$ היא מטריצה אנטי סימטרית.

פתרון.

$$\left(A - A^t\right)^t = A^t - \left(A^t\right)^t = A^t - A = -\left(A - A^t\right)$$

3. הוכח שלכל מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ ניתן לרשום כסכום מטריצה סימטרית ומטריצה אנטי סימטרית.

פתרון.
ראשית נשים לב שמתקיים

$$A = \frac{A - A^t}{2} + \frac{A + A^t}{2}$$

כעת נשים לב ש-$\frac{A+A^t}{2}$ סימטרית כי

$$\left(\frac{A + A^t}{2}\right)^t = \frac{A + A^t}{2}$$

ו-$\frac{A-A^t}{2}$ אנטי סמטרית כי

$$\left(\frac{A - A^t}{2}\right)^t = -\frac{A - A^t}{2}$$

תרגיל 7. תהי $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פיבונאצי המוגדרת באמצעות נוסחת הנסיגה

$$\begin{cases} F_0 = F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}$$

כלומר סדרת המספרים $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots)$ היא תחילת הסדרה. הוכיחו כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

פתרון.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} &= \\ \begin{pmatrix} F_n + F_{n-1} \\ F_n \end{pmatrix} &= \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix} &= \end{aligned}$$

כלומר מתקיים $\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix}$ לכן

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_{n-2} \end{pmatrix} =$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{n} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

תרגיל 8. הוכח\הפרך: אם $AB = BA$ אז $AB^2 = B^2A$?

פתרון. נכון,

$$AB^2 = ABB = BAB = BBA = B^2A$$

שימו לב שאפשר להכליל את זה ל- $A^mB^n = B^nA^m$

תרגיל 9. הוכח\הפרך: אם y_2 ו-y_1 פתרונות למערכת $Ax = 0$ אז $y_1 + 4y_2$ הוא גם פתרון לאותה מערכת?

פתרון. נכון,

$$A(y_1 + 4y_2) = Ay_1 + A4y_2 = Ay_1 + 4Ay_2 = 0 + 4 \cdot 0 = 0$$

תרגיל 10. הוכח\הפרך: אם y_2 ו-y_1 פתרונות למערכת $Ax = b$ $(b \neq 0)$ אז $y_1 + 4y_2$ הוא גם פתרון לאותה מערכת?

פתרון. **לא נכון**, תהי המערכת

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2$$

אז $y_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ו-$y_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ פותרים את המשוואה אך $y_1 + 4y_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ אינו פותר את המשוואה כי

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 10 \neq 2$$

למעשה זה תמיד לא יהיה פתרון של המערכת (הוכיחו בבית!)

בהצלחה!!