יולי 2016

הסתברות למתמטיקאים – 88-165 – מבחן לדוגמה

מרצים: ד״ר ברוך ברזל, מר דן גרשינסקי
משך המבחן: 3 שעות
חומר עזר מותר בשימוש: מחשבון, דפי נוסחאות שהוכנו על ידי הסטודנט (עד 6 דפים).

ענו על 3 מ-4 השאלות הבאות (רק שלוש). כל שאלה – 33 נקודות.
ניתן לענות, בנוסף על הארבע הנ״ל, גם על שאלה 5 (שאלת בונוס - לא חובה). בונוס – 10 נקודות.
אנא סמנו בברור על איזה שאלות בחרתם להשיב והקיפו את תשובותיכם הסופיות.

1. הרדיוס של כוכב אקראי בגלקסיה הוא משתנה מקרי המתפלג נורמלית כ- $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ (שימו לב, שמשתנה מקרי נורמלי יכול לקבל ערכים שליליים $x \in (-\infty, \infty)$, אולם אין משמעות לרדיוס שלילי. אנו נניח שניתן להזניח את ״הזנב״ של צפיפות הרדיוסים מתחת לאפס).
   א. מה ההסתברות שהרדיוס הממוצע של m כוכבים שנבחרו באקראי יהיה גדול מ-2μ?
   ב. האסטרונום זוהר כוכבי מודד בכל יום רדיוס של כוכב אקראי במשך m ימים. אם יגלה כוכב שרדיוסו גדול מ-2μ יזכה בפרס כוכב הזהב בסך K שקלים. לא ניתן לזכות פעמיים, כך שאין משמעות לכמות הכוכבים הגדולים שנמצאו – רק לכך שהכמות גדולה מאפס. מהי תוחלת סכום הזכייה של מר כוכבי?
   ג. עלות החיפוש של הכוכבים היא S שקלים ליום. מר כוכבי מחליט לחפש כוכב שרדיוסו גדול מ-2μ עד לזכייה בפרס. מהי תוחלת הרווח שלו? (הרווח נתון על ידי $R = K - DS$ כאשר D מספר הימים שנדרשו לחיפוש הכוכב המבוקש)
   ד. נתון כי מר כוכבי כבר חיפש במשך יומיים בלא הצלחה. מהי תוחלת הרווח שלו כעת?

השתמשו בסימון המקוצר:

$$E_{\mu,\sigma}(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

2. משתנה מקרי רציף $X \sim U(0,1)$ נגזר מתוך צפיפות אחידה.
   א. מהי פונקציית הצפיפות של המשתנה המקרי $Y = X^n$? (השתמשו ב-n כפרמטר).
   ב. בנו את הפונקציה יוצרת המומנטים של Y, $M_Y(t)$ עבור $n = \frac{1}{2}$.
   ג. השתמשו ב- $M_X(t)$ שמצאתם לעיל עבור $n = \frac{1}{2}$ על מנת לחשב את התוחלת $E(Y)$ והשונות $Var(Y)$ של Y.
   ד. מהי פונקציית ההצטברות $F_Y(b)$ של Y?

3. נולי מפרפר נחמד פתחה בר, בר-נולי, מול חנות האלקטרוניקה פואסוניק. התוכנית העסקית התבססה על ההנחה שמי שקונה מוצרי אלקטרוניקה נעשה צמא וסביר כי ייכנס לבר לקנות בירה. נולי סימנה באמצעות המשתנה המקרי X את ההסתברות שאדם שחולף על פני פואסוניק יתעלם, ייכנס או אף יקנה מוצר אלקטרוניקה, ובאמצעות Y את ההסתברות שאותו אדם יתעלם, ייכנס או אף יקנה משקה בבר-נולי:

מתעלם מהבר	$Y = 0$
נכנס בלא לקנות	$Y = 1$
נכנס וקונה משקה	$Y = 2$

מתעלם מהחנות	$X = 0$
נכנס בלא לקנות	$X = 1$
נכנס וקונה מוצר אלקטרוני	$X = 2$

נולי מצאה כי טבלת ההסתברויות היא:

	$X = 0$	$X = 1$	$X = 2$
$Y = 0$	0.52	0.08	0.002
$Y = 1$	0.022	0.36	0.004
$Y = 2$	0	0.002	0.01

   א. מהי ההסתברות שאדם מסוים יקנה משקה בבר?
   ב. כמה משקאות נמכרים ביום ממוצע אם בכל יום חולפים 1,000 אנשים ברחוב של בר-נולי?
   ג. גאוס קנה מכשיר למדידת רעשים בפואסוניק. מה ההסתברות שיקנה בירה בבר-נולי?
   ד. מהי השונות המשותפת של X ו-Y? ומה ניתן ללמוד ממנה על התוכנית העסקית של נולי?

4. עשרה מנויי פייסבוק נבחרו באקראי (באופן בלתי תלוי). נתגלה כי לאחד מהם 11 חברים, ואילו לכל התשעה האחרים רק חבר אחד.
   א. נניח כי כמות החברים X של אדם אקראי נגזרת מהתפלגות פואסון, דהיינו $X \sim P(\lambda)$. העריכו את λ.
   ב. אם אכן הנחה א' נכונה – מה ההסתברות למדידה שהתקבלה (11 חברים לאחד וחבר בודד ליתר התשעה)?
   ג. מתברר כי בדיוק בחצי מהרשתות החברתיות כמות החברים X נגזרת מפואסון, דהיינו $X \sim P(\lambda)$, ואילו בחצי השני כמות החברים נגזרת מתוך התפלגות אחידה $X \sim U(0,10)$. מהי כעת ההסתברות למדידה שהתקבלה?
   ד. בהינתן המדידה שנעשתה – מה ההסתברות שאכן $X \sim P(\lambda)$?

שאלת בונוס – לא חובה (בונוס 10 נקודות)

5. פונקציית הצפיפות של משתנה מקרי רציף X נתונה כ- $F_X(t) = Ct^{-\gamma}$ כאשר $\gamma > 2$.
   א. מצאו את הקבוע C.
   ב. מהי התוחלת $E(X)$?
   ג. מודדים את X שוב ושוב N פעמים. מה ההסתברות שלפחות פעם אחת התקבל $X > N$?