

אינפי 1 - תרגיל 4

1. נתון: $a_1 = 5$, $a_{n+1} = a_n \cdot \frac{6+a_n}{3+2a_n}$. הוכיחו שהסדרה מתכנסת וחשבו את גבולה.

2. מצאו את הגבול של הסדרה: $a_n = \frac{5^{2n}}{3^{(n+1)^2}}$.

3. נתונות שתי סדרות $\{a_n\}$ ו $\{b_n\}$, נתון שהסדרה $\{a_n + b_n\}$ חסומה, ונתון $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$.

מצאו את הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$.

4. תהי סדרה שאינה חסומה מלעיל. הוכיחו/הפריכו:

a. שואפת לאינסוף $\{a_n\}$.

b. ל- $\{a_n\}$ יש תת סדרה ששואפת לאינסוף.

5. תהי סדרה חסומה. הוכיחו כי ל- $\{a_n\}$ יש בהכרח תת סדרה מונוטונית.

6. תהי הסדרה המוגדרת על ידי כלל הנסיגה $a_{n+1} = \sqrt{a_n}$, ונתון $a_1 = c > 0$.

a. עבור אילו ערכי c הסדרה מונוטונית עולה? יורדת?

b. עבור אילו ערכי c הסדרה מתכנסת?

c. מה גבול הסדרה עבור ערכי c מהסעיף הקודם?

7. תהי סדרה המוגדרת על ידי כלל הנסיגה $a_{n+1} = \sqrt{c+a_n}$ ונתון $a_1 > 0, c > 0$.

a. עבור אילו ערכים של a_1 הסדרה מונוטונית עולה? יורדת? (רמז: נניח x מקיים

$$x = \sqrt{c+x}, \text{ מה קורה כאשר } a_n < x \text{?}$$

b. עבור הערכים שמצאת בסעיף הקודם, האם הסדרה מתכנסת?

c. מה גבול הסדרה כאשר היא מתכנסת? האם יכולתם/ן לענות על סעיף זה לפני

הסעיפים הקודמים?

8. תהי $\{a_n\}$ סדרה המוגדרת על ידי כלל הנסיגה $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$ ונתון $a_1 > 0$. הוכיחו ש-
 $\{a_n\}$ אינה חסומה. (רמז: הראהו שהיא מונוטונית קודם כל).

בהצלחה!

