# תרגול 10

אינטגרל סטילטיס

תהי פונקציה $F(x)$ מונוטונית עולה ב $\mathbb{R}$. מכאן ש $dF((a,b]) = F(b) - F(a) \geq 0$.
מכאן שניתן להגדיר מידה חיצונית על $\mathbb{R}$ $dF^*$ וניתן להראות שהקבוצות המדידות בורל ב $\mathbb{R}$ הינן מדידות ביחס למידה ולכן קיבלנו מידת בורל $dF$ חיובית על $\mathbb{R}$. ומכאן שעבור פונקציות מדידות בורל מתאימות נוכל לרשום

$$\int g(x)dF(x)$$

דוגמא 1: כל פונקצית מדרגות עולה הינה רציפה מימין ולכן מתאימה לה מידת סטילטיס. למשל $F(x) = \sum_i I_{[x_i,\infty)}(x)$, הינה פונקציית מדרגות עבור $\{x_i\} \in \mathbb{R}$. מידת סטילטיס המתאימה תהיה $\sum_i \delta_{x_i}(dx)$.

1. תרגיל: מה הפונקציה אשר מתאימה לה המידה $dF = f(x)dx$ ?

פתרון: נראה שהפונקציה המתאימה הינה $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy$. אכן, קל לראות כי הפונקציה $F(x)$ הינה רציפה על $\mathbb{R}$ וגם כי $dF((a,b]) = \int_a^b f(y)dy = F(b) - F(a)$,

ומכאן שהדבר נכון לכל קבוצת בורל.

<u>תזכורת</u> : בתרגול שעבר דיברנו על שתי מידות $\mu$ ו $\nu$ שאחת מהן, או שתיהן רציפות בהחלט ביחס לשניה וסימנו את זה ב $\mu \ll \nu$. בהרצאה דיברנו על מידה סינגולרית; מידה $\mu$ סינגולרית למידה $\nu$ אם קיימת קבוצה $A$. כך ש $\mu(A) = 0$ ו $\nu(A^c) = 0$.

ראינו בהרצה את פירוק לבג שאומר שכל מידה $\mu$ ניתן לרשום כסכום של שתי מידות

$$\mu = \mu_a + \mu_s$$

כאשר $\mu_a$ הינה מידה רציפה בהחלט ביחס למידה $\nu$ $\mu_s$ הינה סינגולרית ביחס אליה.

<u>הערה</u>: שימו לב כי המידה $dF$ בתרגיל 1 הינה רציפה בהחלט ביחס למידת לבג ואילו בדוגמא אחת ראינו דוגמא למידת סטילטיס שהינה סינגולרית ביחס למידת לבג.

עד עכשיו ראינו מידות $dF$ סינגולריות למידות לבג כך שהפונקציה המתארת אותן $F$ הינה פונקצית מדרגות. הדוגמא הבאה מראה לנו כי קיימות מידות סינגולריות למידת לבג אשר הפונקציה המתארת אותן הינה רציפה. מידות כאלו נקראות מידות סינגולריות רציפות.

2. תרגיל: הראו כי מידת הקנטור בקטע $[0,1]$ המוגדרת להיות מידת סטילטיס של פונקציית קנטור הינה סינגולרית למידת לבג.

פתרון: קודם כל נזכר כי פונקציית קנטור $F(x)$ מוגדרת על הקטע $[0,1]$, עולה ורציפה בו. על מנת להראות כי המידה $dF$ הינה סינגולרית למידת לבג עלינו למצוא שתי קבוצה $A$ כך $dF(A^c)=0$ ו $m(A)=0$. ניקח את $A=C$ כאשר $C$ הינה קבוצת קנטור. ברור כי $m(A)=0$. נסתכל על $A^c$ , זוהי קבוצה פתוחה ב $[0,1]$ , איחוד של אוסף קטעים פתוחים זרים. עבור קטע כזה - $(a,b)$ , מתקיים כי

$$dF((a,b-\varepsilon])=F(b-\varepsilon)-F(a)=0$$

שכן הפונקציה הינה קבועה בתוך כל אחד מהקטעים הללו. ניקח את הגבול ונקבל כי

$$\lim dF((a,b-\varepsilon])=dF((a,b))=0$$

מכאן ש $dF(C^c)=0$ .

**מסקנה**: כל מידה ב $\mathbb{R}$ ניתן לפרק ל

$$\mu=\mu_a+\mu_{sc}+\mu_{sd}$$

כאשר $\mu_{sc}$ הינה סינגולרית רציפה ואילו $\mu_{sd}$ הינה סינגולרית דיסקרטית (מתוארת ע"י קפיצות).

**הגדרה**: נסמן ב $\Delta F_t$ את הקפיצה של הפונקציה $F$ בנקודה $t$ . שימו לב כי מכיוון ש $F$ הינה פונקציה עולה נובע כי $\Delta F_t=0$ פרט למספר בן מנייה של נקודות.

**הגדרה**: נסמן ב $F_{t-}$ את הגבול השמאלי של $F$ בנקודה $t$ . שימו לב כי $F_{t-}$ רציפה משמאל וכי

$$F_t=F_{t-}+\Delta F_t$$

נסתכל כעת רק על פונקציות עולות המוגדרות על $[0,\infty]$ (ההרחבה ל $\mathbb{R}$ הינה מיידית). במצב כזה מתקיים $F_t=dF((0,t])$ . נשים לב שמתקיים גם

$$F_{t-}-F(0)=dF_t(0,t)$$

נניח כי $F(0)=0$ .

תרגיל: הראו כי אם $G_t$ יהנה פונקציה חסומה ועולה ב $(0,\infty)$ אזי $\int_0^t G_s dF_s$ הינה רציפה מימין ועולה.

פתרון: מכך ש $G_t$ חסומה נקבל כי האינטגרל הינו מוגדר היטב. עכשיו,

$$\left|\int_0^{t+\varepsilon} G_s dF_s - \int_0^t G_s dF_s\right| = \left|\int_t^{t+\varepsilon} G_s dF_s\right| \le M\left|\int_t^{t+\varepsilon} dF_s\right| \to 0$$

תרגיל: (אינטגרציה בחלקים) הראו כי אם $F_t, G_t$ הינן פונקציות רציפות מימין ועולות אזי מתקיים

$$F_t G_t = \int_0^t F_{s-} dG_s + \int_0^t G_s dF_s .$$

פתרון: נשים לב כי מצד אחד מקבלים כי

$$F_t G_t = dF\left((0,t]\right) dG\left((0,t]\right) = dF \otimes dG\left((0,t]^2\right)$$

מצד שני נקבל כי

$$\begin{aligned}
\int_0^t F_{s-} dG_s + \int_0^t G_s dF_s &= \int_0^t dF\left((0,s)\right) dG_s + \int_0^t \left(\int_0^s dG_r\right) dF_s \\
&= \iint_{0<x<y\le t} dF \otimes dG(dx,dy) + \iint_{0<y\le x\le t} dF \otimes dG(dx,dy) \\
&= \iint_{(0,t]^2} dF \otimes dG(dx,dy)
\end{aligned}$$

במילים, $\int_0^t F_{s-} dG_s$ הינו האינטגרל ביחס למידת המכפלה על המשולש העליון של $(0,t]^2$ ללא האלכסון, ואילו $\int_0^t \left(\int_0^s dG_r\right) dF_s$ הינו האינטגרל על המשולש התחתון עם האלכסון.

תרגיל: תהי $F_t$ פונקציה ב $C^1(0,\infty]$ ו $G_t$ פונקציה עולה רציפה מימין. הראו כי מתקיים

$$F\left(G_t\right)=\int_0^t F'\left(G_{s-}\right)dG_s+\sum_{s\le t}\left(F\left(G_s\right)-F\left(G_{s-}\right)-F'\left(G_{s-}\right)\Delta G_s\right)$$

פתרון: שימו לב כי עבור $F_t=t$ נקבל כי

$$F\left(G_t\right)=G_t=\int_0^t 1dG_s+\sum_{s\le t}\left(F\left(G_s\right)-F\left(G_{s-}\right)-0\Delta G_s\right)$$
$$=\int_0^t dG_s+\sum_{s\le t}\left(G_s-G_{s-}-\Delta G_s\right)=\int_0^t dG_s$$

בנוסף, ניתן לבדוק (ע"י אינטגרציה בחלקים) כי אם הדבר נכון ל $F\left(x\right)$ הדבר נכון גם ל $xF\left(x\right)$ . מכאן שמשפט נכון לכל פולינום. עבור פונקציה $F\left(x\right)$ כלשהי ב $C^1(0,t]$ נוכל להתקרב עם פולינומים $p_n\left(x\right)$ כך ש $p'_n\left(x\right)$ מתכנס במידה שווה לנגזרת של $F$ . ע"י DCT נקבל כי

$$p_n\left(G_t\right)=\int_0^t p_n'\left(G_{s-}\right)dG_s+\sum_{s\le t}\left(p_n\left(G_s\right)-p_n\left(G_{s-}\right)-p_n'\left(G_{s-}\right)\Delta G_s\right)$$
$$\to\int_0^t F'\left(G_{s-}\right)dG_s+\sum_{s\le t}\left(F\left(G_s\right)-F\left(G_{s-}\right)-F'\left(G_{s-}\right)\Delta G_s\right)$$