זהבית צבי

גיאומטריה אוקלידית, אקסיומות החפיפות- פתרון תרגיל 3

להגשה בתאריך 12.12.17

תרגיל 1

חלק ממשפט C -4

- אם ידוע $AB > CD$ ו-$CD \cong EF$, אז $AB > EF$.

הוכחה

נתון כי $AB > CD$. לפי הגדרת היחס $<$ בין קטעים, קימת נקודה P בין A ו- B כך ש- $AP \cong CD$. נתון גם $CD \cong EF$, אז לפי אקסיומה $C-2$ מקבלים $AP \cong EF$ ושוב לפי הגדרת $<$: $AB > EF$.

- אם $AB < CD$ ו-$CD < EF$ אז $AB < EF$ (טרנזיטיביות).

הוכחה

מכיוון ש-$AB < CD$, קימת נקודה P בין C ו- D כך ש-$AB \cong CP$. מכיוון שנתון כי $CD < EF$ קימת נקודה Q בין E ל F כך ש-$CD \cong EQ$. לפי משפט $C-3$ קימת נקודה יחידה R בין E ל-Q, כך ש-$CP \cong ER$.

מכיוון שגם $AB \cong CP$, לפי אקסיומה $C-2$ מקבלים $AB \cong ER$. לפי בחירת הנקודות Q, R מתקיימים היחסים: $E*R*Q$ ו- $E*Q*F$.

לפי משפט $B.3$ מתקיים $E*R*F$, לכן $ER < EF$ ובסה"כ $AB < EF$.

תרגיל 2

הוכיחו את משפט C.6:

א. זוויות קודקודיות הן חופפות זו לזו.
ב. כל זווית שחופפת לזווית ישרה היא בעצמה זווית ישרה.

הוכחה

א. $\angle ABC$ היא משלימה ל- 180° עבור זווית $\angle ABE$

$\angle DBE$ היא משלימה ל- 180° עבור זווית $\angle ABE$

לפי אקסיומה $C-5$ $\angle ABE \cong \angle ABE$ ולכן לפי משפט $C-5$ זוויות שמשלימות ל- 180° של זוויות חופפות ($\angle ABE$) הן חופפות $\Leftarrow$ $\angle ABC \cong \angle DBE$. מש"ל

ב. נניח $\measuredangle ABC$ היא זווית ישרה ונתון $\measuredangle DEF \cong \measuredangle ABC$.

צריך להוכיח ש$\measuredangle DEF$ ישרה.

נניח שנקודה P היא על הקרן ההפוכה ל-$\overrightarrow{BC}$ ונקודה Q היא על הקרן ההפוכה ל-$\overrightarrow{EF}$.

לפי הגדרת זווית ישרה צריך להוכיח ש-$\measuredangle QED \cong \measuredangle DEF$.

נתון כי $(*)$ $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle DEF$. לפי משפט $C-5$ זוויות המשלימות ל-180° של זוויות חופפות הן חופפות, כלומר $(**)$ $\sphericalangle ABP \cong \sphericalangle DEQ$.
לפי הגדרה ש-$\sphericalangle ABC$ זווית ישרה היא חופפת למשלימה שלה כלומר $(***)$ $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle ABP$.
ולכן לפי אקסיומה $C-5$ $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle DEQ$.
לפי $(**)$ ו-$(***)$ ושוב לפי אקסיומה $C-5$ והמסקנות שהגענו אליהם,
$\sphericalangle DEQ \cong \sphericalangle DEF \Leftarrow \sphericalangle DEF$ ישרה עפ"י הגדרה.

תרגיל 3

משפט C.9: היפוך של משפט C.1

אם ב-ΔABC יש לנו $\sphericalangle B = \sphericalangle C$ אז $AB \cong AC$ ו-ΔABC שווה שוקים.

הוכחה

נחשיב את ההתאמה של הקודקודים $A \leftrightarrow A$, $C \leftrightarrow B$, $B \leftrightarrow C$.

לפי אקסיומה $C-2$, $BC \cong BC$ כל קטע חופף לעצמו.

נתון $\sphericalangle B = \sphericalangle C$ לפי משפט $C-8$ קריטריון ז.צ.ז $\Delta ABC \cong \Delta ACB$.

לכן לפי הגדרת משולשים חופפים נקבל ש-$AB \cong AC$ ומכאן נובע ש-ΔABC שווה שוקים.

תרגיל 4

משפט $C.11$:

נתון קרן $\overrightarrow{BG}$ בין $\overrightarrow{BA}$ ל- $\overrightarrow{BC}$, קרן $\overrightarrow{EH}$ בין $\overrightarrow{ED}$ ל-$\overrightarrow{EF}$, $\sphericalangle CBG \cong \sphericalangle FEH$ ו- $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle DEF$. הוכיחו כי $\sphericalangle GBA \cong \sphericalangle HED$.

הוכחה

נניח בשלילה כי $\sphericalangle GBA \ncong \sphericalangle HED$.
לפי אקסיומה $C-4$ קימת קרן יחידה $\overrightarrow{EX}$ בצד נתון של הישר $\overleftrightarrow{EH}$ כך ש-$\sphericalangle GBA \cong \sphericalangle HEX$, ולכן $\overrightarrow{EX} \neq \overrightarrow{ED}$ קרן יחידה שמקימת את חפיפת הזוויות.
נתון $\sphericalangle CBG \cong \sphericalangle FEH$ ולפי הנחת השלילה $\sphericalangle GBA \cong \sphericalangle HEX$. לכן לפי משפט $C-10$ נקבל $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle XEF$.
בנוסף נתון $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle DEF$ ולכן לפי אקסיומה $C-5$ נקבל: $\sphericalangle DEF \cong \sphericalangle XEF$.
לפי יחידות הקרן שתתן שוויון בין זוויות אלו חיב להתקים $\overrightarrow{EX} = \overrightarrow{ED}$ וקיבלנו סתירה להנחה $\Leftarrow \sphericalangle GBA \cong \sphericalangle HED$. מש"ל.

תרגיל 5

חלק ממשפט 12- C

- אם ידוע $\sphericalangle Q < \sphericalangle P$ ו-$\sphericalangle R \cong \sphericalangle Q$, אז $\sphericalangle R < \sphericalangle P$.

הוכחה

נסמן $\sphericalangle ABC = \sphericalangle P$, $\sphericalangle DEF = \sphericalangle Q$ ו- $\sphericalangle GHI = \sphericalangle R$.
מכיוון שנתון כי $\sphericalangle DEF < \sphericalangle ABC$, קימת קרן $\overrightarrow{BX}$ בין $\overrightarrow{BA}$ ל-$\overrightarrow{BC}$ כך ש- $\sphericalangle DEF \cong \sphericalangle XBC$. לפי אקסיומה $C-5$ $\sphericalangle GHI \cong \sphericalangle XBC$, לכן $\sphericalangle GHI < \sphericalangle ABC$.

בהצלחה ☺