תורת הגרפים - הרצאה 8

18 בדצמבר 2011

הגדרה

גוף תלת מימדי נקרא גוף אפלטוני (או פאון משוכלל) אם כל פאותיו מצולעים משוכללים (ז.א כל הצלעות שוות, כל הזוויות שוות).
כל פאותיו שוות (=חופפות), ובכל קדקד חלות מס' זהה של צלעות.

דוגמאות

1. קוביה
2. טטראדר
3. דודקהדר
4. הפאון הדואלי - במרכז כל פאה נשים קדקד. שני קדקדים שכנים אם לפאות המתאימות יש מקצוע משותף.
   עבור קוביה, נקבל אוקטהדר.
5. הפאון הדואלי לדודקהדר - איקוסהדרון.

משפט

אין גופים אפלטוניים פרט לנ"ל.

הגדרה

גרף פאון הוא גרף שקדקדיו קדקדי הפאון, וצלעותיו - מקצועות הפאון.

למה

כל גרף פאון הוא מישורי.

רעיון ההוכחה

שמים פאה אחת על מישור כשמרכזה בראשית, "מותחים" אותה לאינסוף כשהראשית נק' שבת ומטילים למישור.

מסקנה

גרף פאון מקיים:

$$n - m + f = 2$$

הערה

הפאות "נשמרות" בתהליך הנ"ל של המתיחה.

הוכחת המשפט

יהי G גרף של פאון אפלטוני.
נסמן - מס' הקדקדים בפאה הוא p.
בכל קדקד חלות q פאות.
ברור שp מס' שלם חיובי ≤ 3.
כמו כן, q טבעי ו$q \geq 3$.
יהי f מס' הפאות, m מס' הצלעות וn מס' הקדקדים.
בכל פאה p צלעות, כל צלע משותפת לשתי פאות בדיוק לכן:

$$m = \frac{f \cdot p}{2}$$

בכל פאה p קדקדים, בכל קדקד q פאות, לכן

$$n = \frac{p \cdot f}{q}$$

לפי משפט הפאון של אוילר (מכיוון שגרף הפאון מישורי):

$$\begin{aligned} n - m + f &= 2 \\ \frac{p \cdot f}{q} - \frac{p \cdot f}{2} + f &= 2 \\ \frac{1}{q} - \frac{1}{2} + \frac{1}{p} &= \frac{2}{p \cdot f} \\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} &= \frac{1}{2} + \frac{2}{p \cdot f} \end{aligned}$$

מתקיים $pf > 0$ לכן $\frac{2}{pf} > 0$ ולכן:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2}$$

פתרונות אפשריים:

p	q
3	3
3	4
3	5
4	3
5	3

כל פתרון כזה מגדיר את n, m, f באופן יחיד:

p	q	Platonic Solid
3	3	Tetrahedron
3	4	Octahedron
3	5	Icosahedron
4	3	Cube
5	3	Dodecahedron

משפט

כל גרף מישורי פשוט וסופי ניתן לשיכון נאות במישור כך שכל צלעותיו קטעים ישרים.

רעיון ההוכחה

נשענת על משפט שטיינר - כל גרף מישורי ניתן לשיכון בתוך גרף פאון. (כלומר הוא תת גרף של גרף פאון).

חידה לחנוכה

יש בקופסה נרות מ-3 צבעים. אסור לשים 2 נרות סמוכים מאותו צבע. כמה אפשרויות יש לסדר?

תשובה

$$3\cdot2^{7}$$

(3 על המקום הראשון, ואז יש 2 אפשרויות לכל מקום אחר)

המשך לחידה

מה קורה אם החנוכיה עגולה?

הגדרה - "פונק' הצביעה" של גרף (שם זמני)

יהי G גרף פשוט סופי. נגדיר פונק' $f_{G}\left(k\right)$ = מס' k-הצביעות הכשרות של G.

דוגמאות

- $$f_{N_{n}}\left(k\right)=k^{n}$$

- $$f_{K_{n}}\left(k\right)=k\cdot\left(k-1\right)\cdot..\cdot\left(k-n+1\right)$$

- $$f_{P_{n}}\left(k\right)=k\cdot\left(k-1\right)^{n-1}$$

חידת החנוכה שקולה ל:

$$f_{C_{n}}\left(k\right)$$

משפט

לכל גרף סופי פשוט G, הפונק' $f_{G}\left(x\right)$= מס' x-צביעות כשרות של G היא פולינום.

תזכורת

יהי G גרף פשוט, $\left(u,\,v\right)$ צלע בG. $G\backslash\left(u,\,v\right)$ הגרף המתקבל מהשמטת הצלע $\left(u,\,v\right)$.
$G/(u,v)$ הגרף המתקבל מכיווץ הצלע $\left(u,\,v\right)$ בG (מחליפים את $\left(u,\,v\right)$ בקדקד חדש ששכניו איחוד שכני u וv.

למה

לכל גרף פשוט סופי G, e צלע בG, מתקיים:

$$f_{G\backslash e}\left(x\right)=f_{G}\left(x\right)+f_{G/e}\left(x\right)$$

דוגמה ליישום הלמה

$$\begin{aligned} f_{c_4} &= f_{P_4} - f_{K_3} = x(x-1)^3 - x(x-1)(x-2) \\ &= x(x-1)\left(x^2-3x+3\right) \end{aligned}$$

הוכחת הלמה

צביעות $G\backslash e$ מתחלקות לשני סוגים:

1. u, v בצבעים זהים.
2. u, v נצבעים בצבעים שונים.

נשים לב - כל x-צביעה כשרה של $G\backslash e$ מסוג 1 משרה x-צביעה כשרה של G/e, ולהפך.
לכן מס' הצביעות מסוג 1 של $G\backslash e$ הוא $f_{G/e}(x)$.
כל x-צביעה כשרה של $G\backslash e$ מסוג 2 משרה x-צביעה כשרה של G ולהפך, לכן מס' הצביעות מסוג 2 של $G\backslash e$ הוא $f_G(x)$.
מש"ל למה.

הוכחת המשפט

באינדוקציה על מספר הצלעות בגרף.
אם מס' הצלעות $m=0$ אז הגרף ריק ו-$f_{N_n}(x)=x^n$ פולינום.
נניח נכונות עבור כל גרף פשוט עם פחות מ-m צלעות.
יהי G גרף פשוט עם m צלעות. תהא e צלע ב-G. לפי הלמה:

$$f_G(x) = f_{G\backslash e}(x) - f_{G/e}(x)$$

ב-$G\backslash e$ יש $m-1$ צלעות ולכן $f_{G\backslash e}(x)$ פולינום.
ב-G/e יש לכל היותר $m-1$ צלעות ולכן $f_{G/e}(x)$ פולינום.
הפרש פולינומים הוא פולינום לכן $f_G(x)$ פולינום.

הגדרה

יהי G גרף פשוט סופי.
$f_G(x)$ נקרא פולינום הצביעה של G (או הפולינום הכרומטי, Chromatic Polynomial).

תרגיל

הוכח:

1. $\deg\ f_G(x) = |V(G)|$
2. $f_G(x)$ פולינום מתוקן (המקדם של x^n = 1).

הערה

הלמה הנ"ל מספקת דרך לחשב את פולינום הצביעה של גרף נתון.

דוגמה

$$\begin{aligned} f_{C_8}(x) &= f_{C_8\backslash e}(x) - f_{C_{8/e}}(x) \\ &= f_{P_8}(x) - f_{C_7}(x) \\ &= f_{P_8}(x) - \left[f_{P_7}(x) - f_{C_6}(x)\right] \\ \ldots &= f_{P_8}(x) - f_{P_7}(x) + f_{P_6}(x) - f_{P_5}(x) + f_{P_4}(x) - f_{C_3}(x) \end{aligned}$$

תרגילון

חשב:

$$f_{C_n}\left(x\right)$$

(תן נוסחה קצרה סגורה).

תרגיל

הוכח: לכל גרף פשוט סופי G מתקיים:

$$f_G\left(0\right)=0$$

מסקנה ממשפט סטנלי (שנראה בשבוע הבא)

בהינתן גרף פשוט סופי G מסדר n שקדקדיו בה"כ $\{v_1,\,...,\,v_n\}$, נתבונן במ"ו $\mathbb{R}^n$ ובת"מ מממד $n-1$:
$\{x_i=x_j\ :\ (v_i,\,v_j)\in E\}$.
$|f_G\left(-1\right)|$ סופר כמה "אזורים" יש.

דוגמה

אם $G=K_2$ אז נקבל ב$\mathbb{R}^2$ את הישר $y=x$ ויש שני אזורים, ואכן:

$$\begin{aligned}f_{K_2}\left(x\right) &= x\left(x-1\right)\\ f_{K_2}\left(-1\right) &= -1\cdot\left(-2\right)=2\end{aligned}$$

דוגמה

אם $G=N_2$ אז ב$\mathbb{R}^2$ יש אזור אחד, ואכן:

$$\begin{aligned}f_{N_2}\left(x\right) &= x^2\\ f_{N_2}\left(-1\right) &= \left(-1\right)^2=1\end{aligned}$$

עובדה

יהי G גרף סופי פשוט.

$$\chi\left(G\right)=1+\max\left\{x\in\mathbb{N}\ :\ f_G\left(x\right)=0\right\}$$

הוכחה

אם $x<\chi\left(G\right)$ טבעי אז

$$f_G\left(x\right)=0$$

וכן לכל $x\geq\chi\left(G\right)$ טבעי $f_G\left(x\right)\neq 0$.