תרגיל 2 – מתמטיקה לכימאים ג'

1. חשבו את הגבולות הבאים או הראו כי הם אינם קיימים.

1.1 $$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2\sin n}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\underbrace{\left(\frac{\left(\frac{1}{n}\right)}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}\right)}_{\to 1}\left(\frac{1}{n}\right)\sin n=1\cdot\lim_{n\to\infty}\underbrace{\left(\frac{1}{n}\right)}_{\to 0}\underbrace{\sin n}_{bounded}=1\cdot 0=0$$

1.2 $$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(n)+\cos(n-1)}{n}=\lim_{n\to\infty}(\sin(n)+\cos(n-1))\frac{1}{n}$$

נשים לב: $\sin(n),\cos(n-1)$ סדרות חסומות לכן, גם סכומם, סדרה חסומה.

כמו כן, הסדרה $\frac{1}{n}$ שואפת לאפס. לכן, הגבול הנ"ל שווה לאפס, בתור הגבול של סדרה חסומה כפול סדרה השואפת לאפס.

כלומר: $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(n)+\cos(n-1)}{n}=0$

1.3 $$\lim_{n\to\infty}\frac{n\cos n}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\cos n\frac{n}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\underbrace{\cos n}_{bounded}\underbrace{\left(\frac{n}{n^2+1}\right)}_{\to 0}=0$$

1.4 $$\lim_{n\to\infty}\frac{(-3)^n+5^n}{3^{n+1}+(-5)^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(-3)^n+5^n}{5^n}}{\frac{3\cdot 3^n-5(-5)^n}{5^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\overbrace{\overbrace{\left(-\frac{3}{5}\right)^n}^{\to 0}+1}^{\to 1}}{3\underbrace{\left(\frac{3}{5}\right)^n}_{\to 0}-5(-1)^n}$$

סה"כ: המונה שואף לאחת והמכנה שואף למינוס חמש כפול הסדרה המתבדרת $(-1)^n$ - כלומר המכנה מתנדנד (על בערך) בין מינוס חמש לחמש.

לכן, השבר כולו נע (בגדול) בין מינוס חמישית לחמישית. כלומר, גבול הסדרה לא קיים.

2. חשבו את הגבולות הבאים:

2.1 $\lim_{n\to\infty}n^2e^{-n}$

נשתמש בכלל לופיטל.

$$\lim_{x\to\infty}x^2e^{-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}\overset{l(\frac{\infty}{\infty})}{=}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x}\overset{l(\frac{\infty}{\infty})}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{2}{e^x}=0$$

לכן, $\lim_{n\to\infty}n^2e^{-n}=0$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}$$ **.2.2**

נשתמש בכלל לופיטל.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1-\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\overset{l(\frac{0}{0})}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}-2\frac{1}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}\left(1-\frac{2}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(1-\frac{2}{x}\right)}=\frac{0}{1-0}=0$$

לכן, $\lim_{x\to\infty}\frac{1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}=0$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(2n^3-1)^4}{e^n}$$ **.2.3**

נשתמש בכלל לופיטל.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x(2x^3-1)^4}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{16x^{13}+....+x}{e^x}\overset{l(\frac{\infty}{\infty})}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{16\cdot 13x^{12}+....+1}{e^x}\overset{12\_more\_lupitals}{=}....=\lim_{x\to\infty}\frac{16\cdot 13!}{\underbrace{e^x}_{\to\infty}}=0$$

לכן, $\lim_{n\to\infty}\frac{n(2n^3-1)^4}{e^n}=0$

$$\lim_{n\to\infty}n(e^{\frac{1}{n}}-1)$$ **.2.4**

נשתמש בכלל לופיטל.

$$\lim_{x\to\infty}x(e^{\frac{1}{x}}-1)=\lim_{x\to\infty}\frac{(e^{\frac{1}{x}}-1)}{\frac{1}{x}}\overset{l(\frac{0}{0})}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim_{n\to\infty}e^{\overbrace{\left(\frac{1}{x}\right)}^{\to 0}}=1$$

לכן $\lim_{n\to\infty}n(e^{\frac{1}{n}}-1)=1$

2.5.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-n}{n+3}\right)^{n^2-2}=\lim_{n\to\infty}(-1)^{n^2-2}\left(\frac{n}{n+3}\right)^{n^2-2}=\lim_{n\to\infty}(-1)^{n^2-2}\left(\frac{n+3-3}{n+3}\right)^{n^2-2}=$$

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^{n^2-2}\left(1+\frac{-3}{n+3}\right)^{(n^2-2)\frac{n+3}{n+3}}=\lim_{n\to\infty}\underbrace{(-1)^{n^2-2}}_{bounded}\underbrace{\left(\underbrace{\left(1+\frac{-3}{n+3}\right)^{n+3}}_{\to e^{-3}}\right)^{\overbrace{\left(\frac{n^2-2}{n+3}\right)}^{\to\infty}}}_{\to 0}=0$$

2.6. $\lim_{n\to\infty}n^{\frac{1}{\ln n}}=\lim_{n\to\infty}e^{\ln n^{\frac{1}{\ln n}}}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1}{\ln n}\ln n}=\lim_{n\to\infty}e^1=e$

2.7. $\lim_{n\to\infty}\left(\sin\frac{1}{n}\right)^{\sin\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}e^{\ln\left(\sin\frac{1}{n}\right)^{\sin\frac{1}{n}}}=\lim_{n\to\infty}e^{\sin\frac{1}{n}\ln\left(\sin\frac{1}{n}\right)}$

נחשב את הגבול $\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{n}\ln\left(\sin\frac{1}{n}\right)$

$$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{n}\ln\left(\sin\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{n}\ln\left(\sin\frac{1}{n}\right)\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\frac{1}{n}\ln\left(\sin\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(\sin\frac{1}{n}\right)}{n}$$

$$\underset{if\_the\_\lim its\_exist}{=}1\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(\sin\frac{1}{n}\right)}{n}$$

נחשב $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(\sin\frac{1}{n}\right)}{n}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\sin\frac{1}{x}\right)}{x}\overset{l(\frac{-\infty}{\infty})}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\sin\frac{1}{x}}\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\sin\frac{1}{x}}\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\sin\frac{1}{x}}\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\sin\frac{1}{x}}\lim_{x\to\infty}\underbrace{\cos\frac{1}{x}}_{bounded}\cdot\underbrace{\left(-\frac{1}{x}\right)}_{\to0}=1\cdot0=0$$

לכן $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(\sin\frac{1}{n}\right)}{n}=0$ ו $\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{n}\ln\left(\sin\frac{1}{n}\right)=1\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(\sin\frac{1}{n}\right)}{n}=1\cdot0=0$

ובסה"כ $\lim_{n\to\infty}\left(\sin\frac{1}{n}\right)^{\sin\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}e^{\overbrace{\left(\sin\frac{1}{n}\ln\left(\sin\frac{1}{n}\right)\right)}^{\to0}}=e^0=1$

2.8. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{\sqrt{2n^4+1}}+\ldots+\frac{n}{\sqrt{2n^4+n}}\right)$

נשתמש בכלל הסנדוויץ'.

נשים לב, לכל n טבעי,

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\xleftarrow{\infty\leftarrow n}\frac{n^2}{\sqrt{2n^4+n}}\le\frac{n}{\sqrt{2n^4+1}}+\ldots+\frac{n}{\sqrt{2n^4+n}}\le\frac{n^2}{\sqrt{2n^4+1}}\xrightarrow{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}$$

לכן, לפי כלל הסנדוויץ',

2.9. $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+n^2}{3^n+n}$

נשתמש בכלל לופיטל.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2^x+x^2}{3^x+x}\overset{l(\frac{\infty}{\infty})}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{2^x\ln 2+2x}{3^x\ln 3}\overset{l(\frac{\infty}{\infty})}{=}=\lim_{x\to\infty}\frac{2^x\ln^2 2+2}{3^x}\overset{l(\frac{\infty}{\infty})}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{2^x\ln^3 2}{3^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2^x\ln^3 2}{3^x}=\lim_{x\to\infty}\ln^3 2\left(\frac{2}{3}\right)^x=0$$

לכן, $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+n^2}{3^n+n}=0$

2.10. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n+4^n}$

נשתמש בכלל הסנדוויץ'.

לכל n טבעי

$$4\xleftarrow{\infty\leftarrow n}4=\sqrt[n]{4^n}\le\sqrt[n]{2^n+3^n+4^n}\le\sqrt[n]{3\cdot 4^n}=\sqrt[n]{3}\sqrt[n]{4^n}=4\sqrt[n]{3}\xrightarrow{n\to\infty}4\cdot 1=4$$

לכן, לפי כלל הסנדוויץ'

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n+4^n}=4$$

2.11. $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\ln\ln n}}=\lim_{n\to\infty}e^{\ln\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\ln\ln n}}}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1}{\ln\ln n}\ln\left(\frac{1}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{\ln\left(\frac{1}{n}\right)}{\ln\ln n}}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{\ln\left(n^{-1}\right)}{\ln\ln n}}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{-\ln(n)}{\ln\ln n}}$$

נחשב את הגבול $\lim_{n\to\infty}\frac{-\ln(n)}{\ln\ln n}$ בעזרת כלל לופיטל

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-\ln(x)}{\ln\ln x}\overset{l(\frac{-\infty}{\infty})}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{x}}{\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{\frac{1}{\ln x}}=\lim_{x\to\infty}(-\ln x)=-\infty$$

לכן $\lim_{n\to\infty}\frac{-\ln(n)}{\ln\ln n}=-\infty$ ו $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\ln\ln n}}=\lim_{n\to\infty}e^{\overbrace{\left(\frac{-\ln(n)}{\ln\ln n}\right)}^{\to-\infty}}=0$

2.12. $\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos\frac{3}{n}}{1-\cos\frac{5}{n}}$

נשתמש בכלל לופיטל.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1-\cos\left(\frac{3}{x}\right)}{1-\cos\left(\frac{5}{x}\right)}\overset{l(\frac{0}{0})}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{3}{x}\right)\cdot\left(-\frac{3}{x^2}\right)}{\sin\left(\frac{5}{x}\right)\cdot\left(-\frac{5}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{3}{x}\right)\cdot 3}{\sin\left(\frac{5}{x}\right)\cdot 5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{3}{x}\right)\cdot 3}{\sin\left(\frac{5}{x}\right)\cdot 5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{3}{x}\right)\cdot 3}{\sin\left(\frac{5}{x}\right)\cdot 5}\cdot\frac{\frac{3}{x}}{\frac{3}{x}}\cdot\frac{\frac{5}{x}}{\frac{5}{x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\underbrace{\left(\frac{\frac{5}{x}}{\sin\left(\frac{5}{x}\right)}\right)}_{\to 1}\cdot\underbrace{\left(\frac{\sin\left(\frac{3}{x}\right)}{\frac{3}{x}}\right)}_{\to 1}\cdot\underbrace{\left(\frac{\frac{3}{x}}{\frac{5}{x}}\right)}_{=\frac{3}{5}}\cdot\frac{3}{5}=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{9}{25}$$

לכן, $\lim_{n\to\infty} \frac{1-\cos\frac{3}{n}}{1-\cos\frac{5}{n}} = \frac{9}{25}$

בהצלחה! ☺