

אלגברה מופשטת 2 – תרגיל בית 8

מתרגלים: ד"ר אפי כהן ואדם צ'פמן.

שאלה 1

- א. הוכיחו שאיבר $a \in R$ הוא אי פריק אם ורק אם האידיאל Ra מקסימאלי בין כל האידיאלים בראשיים (האמיתיים) של R .
- ב. אם $p \in R_0 \subseteq R$. הראה ע"י דוגמאות נגדיות כי p יכול להיות אי פריק ב R אז ופריק ב R_0 ולהיפך.

שאלה 2

- יהי $f(x) = x^4 - p^2$ פולינום ב $\mathbb{Z}[x]$. כאשר $p > 2$ ראשוני. על פי הפירוק של f לגורמים ליניאריים מעל שדה המרוכבים, פרקו את f למכפלת שני פולינומים ריבועיים מעל שדה הממשיים. הראו ש f אי פריק מעל \mathbb{Q} .

שאלה 3

- הוכיחו כי הפולינום $x^3y + x^3 - x^2y + xy - x^2 + y^2 + x + 2y + 2$ הוא אי פריק ב $\mathbb{Z}[x, y]$.

שאלה 4

- מצאו את האידיאלים המקסימליים בחוג המנה $\mathbb{Q}[x] / \langle (x-5)^2(x-4) \rangle$.

שאלה 5

- הראה כי אם R חוג קומוטטיבי עם יחידה ו $f, g \in R[x]$ כך ש $g(x)$ פולינום מתוקן, אזי קיימים $r, q \in R[x]$ כך ש $f = gq + r$ וגם $\deg(r) < \deg(g)$ או $r = 0$.

שאלה 6

- א. יהי $\langle -5 + \sqrt{3} \rangle \triangleleft \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ הוכיחו בעזרת הנורמה של $-5 + \sqrt{3}$ כי בחוג המנה

$$\mathbb{Z}[\sqrt{3}] / \langle -5 + \sqrt{3} \rangle$$

יש 22 איברים.

- ב. נגדיר $\varphi: \mathbb{Z}[\sqrt{3}] \rightarrow \mathbb{Z}_{11}$ ע"י $\varphi(a + \sqrt{3}b) = a + 5b$. הוכיחו שזהו אפימורפיזם.

- ג. הוכיחו על סמך סעיף א ש $\langle -5 + \sqrt{3} \rangle \subset \ker \varphi$ (מכיל ממש).

- ד. הראו ש $11 \notin \langle -5 + \sqrt{3} \rangle$ אבל $11 \in \ker \varphi$.

ה. הוכיחו כי $\mathbb{Z}[\sqrt{3}] / \langle 11, -5 + \sqrt{3} \rangle \cong \mathbb{Z}_{11}$.