טופולוגיה

ד"ר טל נוביק

מרחב מטרי הוא קבוצה M ופונקציה $d: M \times M \to [0,\infty)$ כך ש :

1. $d(x,y)=0$ או"א x=y (וברור ש $d(x,y) \geq 0$)
2. $d(x,y)=d(y,x)$ לכל x,y
3. $d(x,z) \leq d(x,y)+d(y,z)$ גם מוכר כאי שוויון המשולש.

דוגמה : על מרחב נורמי נגדיר מטריקה ע"י $d(x,y)=\|x-y\|$. למשל, הנורמה האוקלידית ב$\mathbb{R}^n$ מגדירה את המטריקה האוקלידית על $\mathbb{R}^n$ כדלהלן : $d\big((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)\big)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$

יהי M מרחב מטרי $A \subseteq M$ אזי על A נוכל להגדיר מטריקה ע"י צמצום המטריקה מM.

הגדרה : הספרה הn מימדית היא $S^n=\{(x_1,..,x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2=1\}$.

דוגמה : אם X קבוצה כלשהי, המטריקה הדיסקרטית על X היא מטריקה המוגדרת כך : $d(x,y)=\begin{Bmatrix} 0\,, x=y \\ 1\,, x\neq y \end{Bmatrix}$

ברור שתנאים 1 ו2 מתקיימים. ננסה להוכיח את התנאי השלישי (אי שוויון המשולש).

הגדרה : יהי (M,d) מרחב מטרי ותהי $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ סדרת נקודות בM ויהי $a \in M$. אנו נאמר ש x_n מתכנסת לa ונסמן $\lim_{n\to\infty} x_n=a$ אם לכל $\varepsilon>0$ קיים n_0 כך שלכל $n \geq n_0$ מתקיים $d(x_n,a)<\varepsilon$.

טענה : תהי $\{x_n\}$ סדרה בM אזי x_n מתכנסת לכל היותר לנקודה אחת.

הוכחה : נניח בשלילה שיש $a \neq b$ כך ש $x_n \to a, x_n \to b$. יהי $\varepsilon=\frac{d(a,b)}{2}$. כעת, מכיוון ש$x_n \to a$, יש n_0 כך שלכל $n \geq n_0$ מתקיים $d(x_n,a)<\varepsilon$. כמו כן, קיים n_1 כך שלכל $n \geq n_1$ מתקיים $d(x_n,b)<\varepsilon$. כעת, ניקח $m \gg n_0,n_1$, אזי $d(a,b) \leq d(a,x_n)+d(x_n,b)<\varepsilon+\varepsilon=d(a,b)$, וזו סתירה! מ.ש.ל.■

<u>תרגיל בית</u> : $x_n \to a$ או"א $d(x_n,a) \to 0$.

הגדרה : תהי $\{x_n\}$ סדרה במרחב מטרי M. $\{x_n\}$ תקרא סדרת קושי אם לכל $\varepsilon>0$ יש n_0 כך שלכל $n,m \geq n_0$ מקיים $d(x_n,x_m)<\varepsilon$.

טענה : אם סדרה מתכנסת אז היא סדרת קושי.

הוכחה : נניח כי $\{x_n\}$ מתכנסת לa. יהי $\varepsilon>0$ קיים $n_1>0$כך שלכל $n \geq n_1$ מתקיים $d(x_n,a)<\frac{\varepsilon}{2}$. לכן, אם $m,n \geq n_1$ נקבל כי $d(x_n,x_m) \leq d(x_n,a)+d(x_m,a)<\varepsilon$. מ.ש.ל. ■

הגדרה : מרחב מטרי שבו כל סדרת קושי מתכנסת נקרא מרחב מטרי שלם.

דוגמה למרחב מטרי שבה אין תת סדרה קושי : $\mathbb{N}$ עם המטריקה הדיסקרטית. המרחק בין כל שתי איברים הוא 1, ואין לה אף תת סדרת קושי.

הגדרה : יהי (M,d) מ"מ. יהי $a \in M$, יהי $r>0$.

נגדיר את הכדור הפתוח ברדיוס r סביב a באופן הבא : $B(a,r)=\{x \in M : d(a,x)<r\}$.

במקום להגיד $d(x_n,a) < r$, נוכל פשוט להגיד $x_n \in (a,r)$.

הגדרה: יהיו (M,d) , (N,ρ) שני מרחבים מטריים, $f: M \to N$ ו$a \in M$. נאמר שf רציפה בa אם לכל $\varepsilon > 0$ יש $\delta > 0$ כך שלכל x המקיים $d(x,a) < \delta$ מתקיים $\rho\big(f(x), f(a)\big) < \varepsilon$. (או לחילופין: $f\big(B^M(a,\delta)\big) \subseteq B^N(f(a),\varepsilon)$)

משפט: יהיו $(M,d), (N,\rho)$ מרחבים מטריים. $f: M \to N$ פונקציה. עבור $a \in M$ נאמר שf רציפה בa אוי"א לכל סדרת נקודות x_n בM המקיימת $x_n \to a$ מתקיים ש$f(x_n) \to f(a)$.

הוכחה: נניח כי הפונקציה רציפה. עבור סדרה x_n שמקיימת $x_n \to a$ צריך להוכיח ש$f(x_n) \to f(a)$. נתון $\varepsilon > 0$. f רציפה ולכן קיים $\delta > 0$ כך ש$f(B(a,\delta) \subseteq B(f(a),\varepsilon)$. ידוע כי $x_n \to a$, ולכן יש n_0 כך שלכל $n \geq n_0$ וגם $x_n \in B(a,\delta)$. ולכן $f(x_n) \in B(f(a),\varepsilon)$.

כעת נוכיח את השלילה של הכיוון השני. נניח שf לא רציפה בa. צ"ל שקיימת סדרת x_n בM המקיימת $x_n \to a$ אך $f(x_n) \to f(a)$. נבנה סדרה שמקיימת את זה. מתוך כך שf אינה רציפה אנו יודעים כי קיים $\varepsilon > 0$ כך שלכל $\delta > 0$ בפרט ל-$\delta = \frac{1}{n}$. יש $x \in M$ כך ש-$d(a,x) < \frac{1}{n}$ ובכל זאת $\rho\big(f(x), f(a)\big) \geq \varepsilon$. נבחר x כזה ונסמנו x_n. נעשה זאת לכל n ונקבל סדרת נקודות $\{x_n\}$ בM כך ש-$d(x_n,a) < \frac{1}{n}$ ו$\rho\big(f(x_n), f(a)\big) \geq \varepsilon$ לכל n. אנו יודעים כי $d(x_n,a) \to 0$ ולכן $x_n \to a$, ובכל זאת נקבל $f(x_n)$ לא מתכנסת ל$f(a)$. מ.ש.ל. ■

הגדרה: יהי M מ"נ. אזי קבוצה $A \subseteq M$ תקרא פתוחה בM אם לכל $a \in A$ יש $r > 0$ כך ש$B(a,r) \subseteq A$.

טענה: עבור X עם המטריקה הדיסקרטית כל תת קבוצה היא פתוחה בX.

אנו יודעים כי $B(a,1) = \{a\}$, $B(a,3) = X$, $B(a,7) = X$. מכאן והלאה נסמן את המטריקה הדיסקרטית כdisc.

טענה: כדור פתוח הוא קבוצה פתוחה.

הוכחה: יהי $B(a,r)$ כדור פתוח במרחב מטרי M תהי $x \in B(a,r)$ צריך למצוא $\varepsilon > 0$ כך ש$B(x,\varepsilon) \subseteq B(a,r)$. כעת, ניקח $\varepsilon = r - d(x,a)$ ונוכיח כי $B(x,\varepsilon) \subseteq B(a,r)$. כלומר, אם $d(y,x) < \varepsilon$ אז $d(y,a) < r$. אכן $d(y,a) \leq d(y,x) + d(x,a) < \varepsilon + d(x,a) = r$. מ.ש.ל. ■

משפט: יהי M מ"מ. אזי מתקיים:

א. M וΦ פתוחות.
ב. אם $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ אוסף כלשהו של קבוצות פתוחות בM אזי $\cup_{\alpha \in I} U_\alpha$ קבוצה פתוחה בM.
ג. אם $U_1, U_2, \dots, U_n$ אוסף סופי של קבוצות פתוחות אז $U_1 \cap \dots \cap U_n$ קבוצה פתוחה.

הוכחה:

א. זה טריוויאלי.
ב. יהי $a \in \cup_{\alpha \in I} U_\alpha$ יש $\beta \in I$ כך ש$a \in U_\beta$. U_β פתוחה ולכן קיים $r > 0$ כך ש$B(a,r) \subseteq U_\beta \subseteq \cup_{\alpha \in I} U_\alpha$.
ג. יהי $a \in U_1 \cap \dots \cap U_n$. לכל $1 \leq i \leq n$ מתקיים עי $a \in U_i$. לכן יש $r_i > 0$ כך ש$B(a,r_i) \subseteq U_i$ נזמן $r = \min\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ אזי $r > 0$ ומתקיים $B(a,r) \subseteq U_i$ לכל $1 \leq i \leq n$ לכן $B(a,r) \subseteq U_1 \cap \dots \cap U_n$

מ.ש.ל.■

הגדרה: יהי M מ"מ. $a \in M$. סביבה של a היא קבוצה פתוחה $U \subseteq M$ כך ש$a \in U$.

טענה: יהי M,N מ"מ, $f: M \to N$ פונקציה. $a \in M$ אזי f רציפה בa או"א לכל סביבה V של f(a) בN יש סביבה U של a בM כך ש$f(U) \subseteq V$.

הוכחה: נניח f רציפה בנקודה a, ותהי V סיבה על f(a). אזי כיוון שV פתוחה ו$f(a) \in V$ יש $\varepsilon > 0$ כך ש$B(f(a),\varepsilon) \subseteq V$. f רציפה בa, לכן יש $\delta > 0$ כך ש$f\left(B(a,\delta)\right) \subseteq B(f(a),\varepsilon) \subseteq V$ וניקח $U = B(a,\delta)$.

בכיוון השני, נניח כי התנאי על הסביבות מתקיים. יהא נתון $\varepsilon > 0$. $B(f(a),\varepsilon)$ סביבה של f(a), לכן קיימת סביבה U של a כך ש$f(U) \subseteq B(f(a),\varepsilon)$. U פתוחה, a נמצאת בU, ולכן יש $\delta > 0$ כך ש$B(a,\delta) \subseteq U$ ומתקיים$f\left(V(a,\delta)\right) \subseteq f(U) \subseteq B(f(a),\varepsilon)$.

מ.ש.ל. ∎

<u>שיעור 2 (5.3.2014):</u>

תרגיל: יהי M מ"מ. $\{x_n\}$ סדרת נקודות בM. עבור $a \in M$ אז $x_n \to a$ או"א לכל סביבה U של a יש n_0 כך שלכל $n \geq n_0$ מתקיים ש$x_n \in U$.

טענה: יהי M,N מרחבים מטריים. $f: M \to N$ אזי f רציפה או"א לכל $U \subseteq N$ שפתוחה בN מתקיים $f^{-1}(U)$ פתוחה בM.

הלמה השימושית: (הל"ש): תהי A קבוצה ונניח שלכל $a \in A$ יש קבוצה שנסמנה E_a כך ש$a \in E_a \subseteq A$. אזי $\cup_{a\in A} E_a = A$.

הוכחה: בכיוון השמאל לימין ההוכחה ברורה, ומימין לשמאל גם כן.

הוכחת ה*טענה*: כיוון 1: נניח f רציפה. תהי $U \subseteq N$ פתוחה. צ"ל ש$f^{-1}(U)$ פתוחה. תהי $x \in f^{-1}(U)$. כלומר ש$f(x) \in U$. f רציפה בx, ולכן יש סביבה V_x של x, כלומר V_x פתוחה וגם $x \in V_x$. כך ש $f(V_x) \subseteq U$. כלומר, $V_x \subseteq f^{-1}(U)$. ע"פ הלמה השימושית $\cup_{x\in f^{-1}(U)} V_x = f^{-1}(U)$ אולם ידוע לנו שV_x פתוחה, ולכן איחודן של פתוח. כלומר $f^{-1}(U)$ פתוח.

כיוון 2: נניח f מקיימת שתמונה הפוכה של קבוצה פתוחה היא קבוצה פתוחה. צ"ל שf רציפה. כלומר רציפה בכל נקודה $x \in M$. יהא נתון $x \in M$ ותהא U סביבה של f(x). ניקח $V = f^{-1}(U)$ היא פתוחה ו$x \in V$ כי $f(x) \in U$. ומתקיים ש$f(V) \subseteq U$ כי $f(V) = f\left(f^{-1}(U)\right) \subseteq U$. ∎

טענה: יהי M מ"מ. $A \subseteq M$ אזי $U \subseteq A$ היא פתוחה בA או"א קיימת $V \subseteq M$ פתוחה בM כך ש$U = V \cap A$

הוכחה: נראה ראשית מה קורה אם כדורים. נסמן $B^A(a,r), B^M(m,\rho)$ כדורים בM ובA בהתאמה. נראה ש$B^A(a,r) = B^M(a,r) \cap A$ – וזה בפשטות נכון.

כיוון 1: נניח ש$V \subseteq M$ פתוחה בM. נראה ש$V \cap A$ פתוחה בA. תהי $a \in V \cap A$ בפרט, $a \in V$ ולכן יש $r > 0$ כך $B^M(a,r) \subseteq V$. אזי $B^A(a,r) = B^M(a,r) \cap A \subseteq V \cap A$.

כיוון 2: תהי $U \subseteq A$ פתוחה. צריך למצוא $V \subseteq M$ פתוחה בM כך ש$U = V \cap A$. לכל $x \in U$ חש $r_x > 0$ כך ש$B^A(x,r_x) \subseteq U$. נסמן $\cup_{x\in A} B^M(x,r_x) = V$. ומאחר שהיא איחוד של קבוצות פתוחות בM, נקבל $V \subseteq M$ וגם כן פתוחה בM. לכן, $V \cap A = \left(\cup_{x\in A} B^M(x,r_x)\right) \cap A = \cup_{x\in A} B^M(x,r_x) \cap A = \cup_{x\in A} B^{A(x,r_x)} = U$ והמעבר האחרון הוא על פי הלמה השימושית. ∎

דוגמה: $M = \mathbb{R}, A = \mathbb{Q}$. נביט ב$U = (0,1) \cap \mathbb{Q}$. זו קבוצה פתוחה ע"פ המשפט שלנו! (ברציונאלים, לא בℝ)

<u>הגדרה</u>: יהי M מ"מ. אזי $S \subseteq M$ נקראת סגורה אם S^C הינה פתוחה.

משפט: הקבוצות בM מקיימות את שלוש התכונות הבאות:

א. M, ϕ קבוצות סגורות וגם פתוחים.
ב. יהי $\{S_\alpha\}_{\alpha\in I}$ אוסף כלשהו של קבוצות סגורות אזי גם $\bigcap_{\alpha\in I} S_\alpha$ סגורה.
ג. אם $S_1,\dots,S_n$ אוסף סופי של קבוצות סגורות אז גם $S_1\cup\dots\cup S_n$ סגורה.

משפט: יהי M מרחב מטרי, $S\subseteq M$ אזי S סגורה אמ"א S מקיימת את התכונה הבאה: לכל סדרת נקודות $\{x_n\}\subseteq S$ אם היא מתכנסת בM נאמר ל$a\in M$, אז מתקיים ש$a\in S$.

הוכחה: כיוון 1: נניח S סגורה. תהי $\{x_n\}$ סדרת נקודות בS. ונניח $x_n\to a\in M$. צ"ל ש$a\in S$. נניח בשלילה ש$a\notin S$. כלומר ש$a\in S^C$. S^C היא סביבה של a, לכן יש n_0 כך שלכל $n\ge n_0$ מתקיים $x_n\in S^C$ כלומר $x_n\notin S$, וזו סתירה.

כיוון 2: נניח שS מקיימת את התנאי הנ"ל על סדרות. צריך להוכיח שS סגורה. כלומר, צ"ל שS^C פתוחה. נניח שלא! כלומר, נניח שS^C לא פתוחה. כלומר, נניח שקיימת נקודה $a\in S^C$ כך שלכל $\varepsilon>0$ בפרט עבור $\varepsilon=\frac{1}{n}$, $B\left(a,\frac{1}{n}\right)\subseteq S$, כלומר ש$B\left(a,\frac{1}{n}\right)\cap S\neq\phi$. נבחר x בתוך התחום הזה ונקבלו בx_n. אם נעשה זאת לכל n, נקבל סדרה $\{x_n\}$. מהגדרת x_n, מתקבל $x_n\in B\left(a,\frac{1}{n}\right)\cap S$ בפרט $x_n\in S$. $d(x_n,a)<\frac{1}{n}$ לכן $x_n\to a$. נזכור כי $a\notin S$. סתירה! ■

הגדרה: מטריקות שקולות הם שתי מטריקות על אותה קבוצה שהן שונות אך מגדירות בדיוק את אותן הקבוצות הפתוחות.

דוגמה: כפל בקבוע למשל. אבל נסתכל על $\mathbb{R}^2$, ניקח את המטריקות הבאות: $d\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ – היא המטריקה האוקלידית, ונביט גם על מטריקת המקסימום $\rho\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big)=\max\{|x_1-x_2|,|y_1-y_2|\}$.

הגדרה: יהי M מ"מ. תהי $A\subseteq M$ ויהי $p\in M$ אזי p נקראת נקודת הצטברות של A אם לכל $\varepsilon>0$ יש $x\in A$ שאיננו p (כלומר $x\in A\backslash\{p\}$ כך ש$d(x,p)<\varepsilon$.

באופן שקול, ע"י סביבות ניתן להגדיר כך: לכל סביבה U של p מתקיים $U\cap(A\backslash\{p\})\neq\phi$.

משפט: יהי M מ"מ. ותהי $A\subseteq M$, ויהי $p\in A$. אזי הוכיחו כי התנאים הבאים שקולים:

א. p נקודת הצטברות של A.
ב. בכל סביבה של p יש אינסוף נקודות של A.
ג. יש סדרת נקודות $\{x_n\}$ בA שבה p לא מופיע וגם $x_n\to p$
ד. יש סדרות נקודות שונות זו מזו $\{x_n\}$ בA כך ש$x_n\to p$.

פתרון:

ב' גורר את א' בפשטות, וג' נובע מד' לחלוטין. נותר לנו להוכיח שתי גרירות (ג'->ב', א'->ד').

נתחיל בא'->ד': נניח שp נקודת הצטברות של A. נבנה סדרת נקודות שונות $x_n\in A$ באופן שנניח שכבר הגדרנו את $x_1,\dots,x_{n-1}$ ונניח שהצלחנו לעשות זאת באופן ש$d(x_1,p)>d(x_2,p)>\cdots>d(x_{n-1},p)$ וכן $x_i\neq p$ לכל $1\le i\le n-1$. וכן $d(x_i,p)<\frac{1}{i}$ לכל $1\le i\le n-1$.

נגדיר $\varepsilon=\min\left\{\frac{1}{n},d(p,x_{n-1})\right\}$ ומהגדרת נקודת הצטברות יש x כך ש$x\neq p$ וגם $d(x,p)<\varepsilon$. נבחר x כזה ונקרא לו x_n. נמשיך לכל n ונקבל סדרה של נקודות בA שונות (וגם שונות מp) כך ש$x_i\in A$ ו$x_i\to p$. כעת נותר לנו להוכיח ש(ג'->ב')

במקום זה, נוכיח שד'->ב'. אם יש נקודה p ויש בA סדרה של נקודות שונות זו מזו שמתכנסות לp, ברור שכל איברי הסדרה החל מנקודה מסוימת נמצאים שם. לכתוב הוכחה פורמלית בבית, וגם להוכיח שג'->ד': אבל זה מאוד דומה לא'->ד' ואתם תעשו כתרגיל. אולי עדיף בכלל להוכיח ג'->א'.

<u>הרצאה 3 (12.3.2014):</u>

<u>הגדרה</u>:

א. יהי M מ"מ ויהי $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ אוסף של קבוצות פתוחות בM. אנו נאמר ש $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ כיסוי של M אם $\cup_{\alpha\in I} U_\alpha = M$. כדי לא לציין מלכתחילה ש U_α פתוחים נוכל לאחד ביחד $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ הוא כיסוי פתוח של M. כלומר "כיסוי פתוח" הוא אוסף של קבוצות פתוחות שאיחודן הוא המרחב כולו.

ב. אם $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ כיסוי של M. תת כיסוי הוא אוסף חלקי שעדיין איחודו הוא כל M. כלומר $J \subseteq I$ אך ש$\cup_{\alpha\in J} U_\alpha = M$.

ג. אם $\{U_\alpha\}$ כיסוי של M, אז תת כיסוי סופי הוא תת כיסוי שאוסף האינדקסים הוא סופי. כלומר $F \subseteq I$ כאשר F סופי מקיים $\cup_{\alpha\in F} U_\alpha = M$.

ד. יהי M מ"מ. M יקרא קומפקטי אם לכל כיסוי פתוח של M יש תת כיסוי סופי.

דוגמה: קטע סגור [a,b] הוא מרחב קומפקטי.

הוכחה: יהא נתון כסוי פתוח $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ של [a,b] . נקרא ל$x \in [a,b]$ "נקודה טובה" אם יש אוסף סופי $F \subseteq I$ כך ש$[a,x] \subseteq U_{\alpha\in F} U_\alpha$. נסמן בT את קבוצת כל הנקודות הטובות.

1. אם $t \in T$ ו$s < t$ אז $s \in T$ כי $[a,s] \subseteq [a,t]$.
2. אולי T ריקה? אבל לא, כי $a \in T$.
3. T חסומה ע"י b, לכן יש לT חסם עליון ונסמן $C = \sup(T)$. נוכיח כי C=b וגם שהיא נקודה טובה ואז סיימנו.

יש $\beta \in I$ כך ש$C \in U_\beta$. אך ההסבר ניתן כללי בכיתה – מומלץ לכתוב את ההוכחה כתרגיל בית.

משפט: יהי M מ"מ התכונות הבאות עבור M שקולות:

1. M קומפקטי.
2. לכל תת קבוצה אינסופית $A \subseteq M$ יש נקודת הצטברות בM.
3. לכל סדרת נקודות בM יש תת סדרה מתכנסת.

הוכחה: נראה כי 1->2: תהא $A \subseteq M$ אינסופית. נניח בשלילה שאין לה נקודות הצטברות. כלומר, לכל $p \in M$, p איננה נקודת הצטברות של A כלומר לכל $p \in M$ יש סביבה U_p כך ש $\{p\}$ או $U_p \cap A = \phi$. ביחד נאמר שב$U_p \cap A$ יש לכל היותר נקודה אחת מA. מתקיים $\cup_{p\in M} U_p = M$ (ע"פ הלמה השימושית). מצד אחד כיוון שM קומפקטי יש $p_1, \dots, p_n$ כך ש$U_{p_1} \cup \dots \cup U_{p_n} = M$ אולם אז $A = M \cap A = \left(U_{p_1} \cap A\right) \cup \dots \cup \left(U_{p_n} \cap A\right) \subseteq \{p_1, \dots, p_n\}$ סתירה לכך שA אינסופית.

2->3: אנו מניחים את תכונה 2, ותהא נתונה סדרה $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M$. אם קבוצת הנקודות שמופיעה בסדרה $\{x_n\}$ היא סופית, אזי אחת מהן מופיעה אינסוף פעמים ולכן יש ל$\{x_n\}$ תת סדרה קבועה ולכן הינה מתכנסת. אחרת , נסמן בA את קבוצת הנקודות שמופיעות בסדרה והיא קבוצה אינסופית. לכן , מתכונה 2, יש נקודה $a \in M$ שהיא נקודת הצטברות של A. מהמשפט בשיעור קודם יש בA סדרת נקודות שונות שמתכנסת לa. ניקח תת סדרה של $\{x_n\}$ שבה מופיע כל y_n פעם אחת, כיוון שy_n הם שונים זה מזה, תהא בחירה של אינסוף אינדקסים שונים. תת הסדרה שקיבלנו כוללת בדיוק את אותן נקודות של $\{y_n\}$ רק פעם אחת, אבל אולי לא בסדר שהן מופיעות ב$\{y_n\}$. ח

אולם התכונה הבאה של סדרות שאיננה מזכירת את הסדר היא שקולה להתכנסות $a_n \to c$ או"א לכל $\varepsilon > 0$ יש תת קבוצה סופית $F \subseteq \mathbb{N}$ כך ש$d(a_n, c) < \varepsilon$ לכל $n \in \mathbb{N} - F$.

3->1: נניח תכונה 3 (לכל סדרה יש תת סדרה מתכנסת) ונוכיח את התכונה הבאה (שלב א'): לכל כיסוי פתוח $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ של M, יש $\delta > 0$ כך שלכל $p \in M$ יש $\alpha \in I$ כך ש$B(p,\delta) \subseteq U_\alpha$. <u>הוכחה</u>: נניח בשלילה שקיים כיסוי פתוח כך שלכל $\delta > 0$ לא מתקיים זאת. בפרט, לכל n, $\delta = \frac{1}{n}$ לא מקיים זאת. כלומר, יש $p_n \in M$ כך ש$B\left(p_n, \frac{1}{n}\right)$ איננו מוכל באף אחת מקבוצות הכיסוי. תהי p_{n_k} תת סדרה מתכנסת של $\{p_n\}$ כלומר יש $a \in M$ כך ש $p_{n_k} \to a$. קיים $p \in I$ כך ש$a \in$

U_β. U_β פתוחה, לכן יש $r > 0$ כך ש $B(a,r) \subseteq U_\beta$. ניקח k מספיק גדול כך ש $d(a,p_{n_k}) < \frac{r}{2}$ וכן $\frac{1}{n_k} < \frac{r}{2}$ ואז יתקיים $B\left(p_{n_k},\frac{1}{n_k}\right) \subseteq B(a,r) \subseteq U\_\beta$ סתירה .

כי נניח $x \in B\left(p_{n_k},\frac{1}{n_k}\right)$. כלומר $d(x,p_k) < \frac{1}{n_k}$. אז $d(x,a) \le d(x,p_{n_k}) + d(p_{n_k},a) < \frac{1}{n_k} + \frac{r}{2} < r$ כלומר $x \in B(a,r)$.

(שלב ב׳) : יהא נתון כיסוי פתוח של M , נראה שיש לו תת כיסוי סופי. משלב א׳ אנו יודעים שיש $\delta > 0$ כך שלכל $p \in M$ יש $\alpha \in I$ כך $B(p,\delta) \subseteq U_\alpha$. נבחר $p_1 \in M$ כלשהו. אם $B(p,\delta) = M$ סיימנו כי יש $\alpha \in I$ כך ש $B(p,\delta) \subseteq U_\alpha$ ואז U_α הוא תת כיסוי סופי.

אחרת יש $p_2 \notin B(p,\delta)$. אם $M = B(p_2,\delta) \cup B(p_1,\delta)$ אז סיימנו. כי יש α_2 כך ש $B(p_2,\delta) \subseteq U_{\alpha_2}$ ואז $U_{\alpha_1} \cup U_{\alpha_2} = M$.

אחרת : יש p_3 וכן הלאה.

אם נתקענו בשלב מסוים N , אז קיבלנו תת כיסוי סופי $U_{\alpha_1},\dots,U_{\alpha_n}$. אחרת הצלחנו ליצור סדרה אינסופית $\{p_n\}$ המקיימת $d(p_n,p_m) \ge \delta$ לכל $n \neq m$. לכן כל תת סדרה של סדרה זו היא לא סדרת קושי ולכן לא מתכנסת. מ.ש.ל. $\blacksquare$.

בשלב ב׳ של הוכחת 3->1 הוכחנו את הטענה הבאה : אם M מקיים שלכל סדרת נקודות בM יש תת סדרה מתכנסת אז M מקיים את התכונה הבאה : לכל כיסוי פתוח $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ של M יש $\delta > 0$ כך שלכל $p \in M$ יש $\alpha \in I$ ש $B(p,\delta) \subseteq U_\alpha$.

כעת אחרי סיימנו את כל ההוכחה , אנו יודעים שהתכונה שלכל סדרה יש תת סדרה מתכנסת היא שקולה לקומפקטיות, לכן כעת אנו יכולים לנסח את המשפט הבא :

משפט : יהי M מרחב מטרי קומפקטי אזי לכל כיסוי פתוח $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ של M יש $\delta > 0$ כך שלכל $p \in M$ יש $\alpha \in I$ כך ש $B(p,\delta) \subseteq U_\alpha$, ו δ גזה נקרא <u>מספר לבג של הכיסוי</u>.

משפט : (היינה בורל) תהי $A \subseteq \mathbb{R}^n$ אזי A קומפקטי או״א A קבוצה סגורה ב$\mathbb{R}^n$ וחסומה.

הוכחה : כיוון 1 : נניח $A \subseteq \mathbb{R}^n$ סגורה וחסומה. נראה שלכל סדרת נקודות בA יש תת סדרה מתכנסת בA. תהי $\{a_n\}$ סדרת נקודות בA, כיוון שA קבוצה חסומה, הסדרה $\{a_n\}$ סדרה חסומה ולכן (ממשפט שהוכח באינפי 3) יש לa_n תת סדרת מתכנסת a_{n_k}.

כלומר, יש $c \in \mathbb{R}^n$ כך ש $a_{n_k} \to c$. אך כיוון שA סגורה, $c \in A$. כלומר, a_{n_k} מתכנסת בA.

כיוון 2 : נניח שA לא חסומה. כלומר, A לא מוכל ב... $B^{\mathbb{R}^n}(0,1), B^{\mathbb{R}^n}(0,2),$ וכן הלאה. נסמן : $U_n = B^A(0,n) =$ $B^{\mathbb{R}^n}(0,n) \cap A$ אזי התנאי A לא מוכל $B^{\mathbb{R}^n}(0,n)$ פרושו $U_n \neq A$. אם האוסף $\{U_n\}_n$ הוא כיסוי פתוח שאין לו תת כיסוי סופי. כי אילו הה לו תת כיסוי סופי $B^A(0,1) \dots B^A(0,n)$ אזי יש n_i מקסימלי, $B^A(0,n_i)$ יכיל את כל האחרים, לכן האיחוד שלהם הוא $B^A(0,n_i)$ עצמו, והוא איננו כל A.

כעת נניח שA לא סגורה, ונראה שA לא קומפקטי. (ההבדל בין הזכר לנקבה הוא להבדיל בין קבוצה למרחב מטרי). A לא סגורה פירושו שיש סדרת נקודות $\{a_n\}$ בA ו$p \in M$ כך ש$a_n \to p$ אך $p \notin A$. נניח בשלילה שיש תת סדרה a_{n_k} ויש $a \in A$ כך ש$a_{n_k} \to a$. גם כאשר נחשוב על a_{n_k} כסדרה בM , עדיין יהיה נכון ש$a_{n_k} \to a$ אולם גם $a_{n_k} \to p$, ו$a \neq p$ כי $a \in A$ ו$p \notin A$. קיבלנו סתירה ליחידות הגבול בM.

בזאת חתמנו את הנושא של מרחבים מטרים, ונגדיר כעת מה זה מרחב טופולוגי.

<u>הגדרה</u>: מרחב טופולוגי הוא קבוצה X, ומשפחה T של תתי קבוצות של X כך ש:

א. $x \in T, \phi \in T$
ב. אם $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ אוסף של קבוצות כך ש$U_\alpha \in T$ לכל $\alpha \in I$ אז $\cup_{\alpha\in I} U_i \in T$.
ג. אם $U_1, \dots, U_n$ אוסף סופי של קבוצות כך ש$U_i \in T$ לכל $i = 1, \dots, n$ אזי $U_1 \cap \dots \cap U_n \in T$

מרחב טופולוגי הוא זוג (X, T) אך בד"כ נאמר על X שהוא מ"ט.

T (המקיימת את התנאים הנ"ל) נקראת הטופולוגיה על X.

אברי T נקראים "קבוצות פתוחות".

דוגמאות:

1. מרחב מטרי M עם הקבוצות הפתוחות המוגדרות באמצעות המטריקה.
2. X קבוצה כלשהי ו$T = P(X)$ (כל תתי הקבוצות של X). – הטופולוגיה הדיסקרטית על X.
3. X קבוצה כלשהי, $T = \{\phi, X\}$ – הטופולוגיה הטריוויאלית על X.

טענה: במרחב מטרי, כל נקודון $\{p\}$ הוא קבוצה סגורה.

הוכחה: בסדרות זה הכי פשוט, ההוכחה יוצאת טריוויאלית.

טענה: במרחב מטרי M כל קבוצה מהצורה $M - \{p\}$ היא פתוחה. לכן אם X שיש בה יותר מנקודה אחת, אז X עם הטופולוגיה הטריוויאלית היא לא מרחב טופולוגי מטריזבילי , כלומר אין אף מטריקה על X כך שהטופולוגיה שהיא מרשה היא הטופולוגיה הטריוויאלית.

הוכחה: ניקח $p \in X$ כלשהו, אז הראנו שבכל מטריקה $x - \{p\}$ קבוצה פתוחה, אולם אם יש בX יותר מנקודה אחת אז $X - \{p\} \neq X$ וגם $X - \{p\} \neq \phi$.

<u>הגדרה</u>: יהיו (X,T) ו(Y,T') שני מרחבים טופולוגיים, ותהי $f: X \to Y$ פונקציה. אנו נאמר שf רציפה אם לכל $U \in T'$ מתקיים ש$f^{-1}[U] \in T$.

האם $sin: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ רציפה גם ע"פ הגדרה זו? כן, נובע ממשפטים כבר באינפי 1.

<u>הרצאה 4 (26.3.2014):</u>

טענה:

א. X מרחב טופולוגי, אזי $Id: X \to X$ היא רציפה.
ב. יהיו X,Y מ"ט. $p \in Y$ נסמן $K_p: X \to Y$ את ההעתקה הקבועה שערכה הקבוע הוא p. כלומר, לכל $x \in X$ מתקיים $K_p(x) = p$. אזי, K_p רציפה.
ג. יהי x,y,z מ"ט. $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ רציפות. אזי $g \circ f$ רציפה.

הוכחה:

א. טריוויאלי.
ב. תהי $u \subseteq Y$ קבוצה פתוחה . אזי $f^{-1}(u) = \begin{cases} \phi , p \notin u \\ X , p \in u \end{cases}$.
ג. תהי $u \subseteq Z$ פתוחה. $(g \circ f)^{-1}(u) = f^{-1}\left(g^{-1}(u)\right)$ – ידוע לנו מתורת הקבוצות. ■

הגדרה: יהיו X, Y מ"ט. $f: X \to Y$ פונקציה. עבור $a \in X$ נאמר שf רציפה בa אם לכל סביבה U של $f(a)$ יש סביבה V של a כך ש$f(V) \subseteq U$.

הגדרה: יהי X מ"ט. תהי $p \in X$. סביבה של p היא קבוצה פתוחה U כך ש$p \in U$.

טענה: יהיו Y,X מ"ט . $f: X \to Y$. אזי f רציפה אמ"מ f רציפה בכל נקודה בX.

הוכחה: $\Rightarrow$: נניח f רציפה בכל נקודה $a \in X$. ונרצה להראות שf רציפה. תהי $u \subseteq Y$ פתוחה. צריך להוכיח ש$f^{-1}(u)$ פתוחה בX. תהי $a \in f^{-1}(u)$. אזי $f(a) \in u$ כלומר u סביבה של f(a). לכן קיימת סביבה V_a של a כך ש$f(V_a) \subseteq u$ כלומר $V_a \subseteq f^{-1}(u)$. ועי״פ הלמה השימושית נקבל $f^{-1}(u) = \cup_{a\in f^{-1}(u)} V_a$ ולכן $f^{-1}(u)$ פתוחה כי היא איחוד של קבוצות פתוחות.

$\Leftarrow$: נניח שf רציפה. ז״א צ״ל שf רציפה בכל נקודה $a \in X$. תהא נתונה $a \in X$ ותהי U סביבה של f(a). אזי $f^{-1}(u)$ פתוחה, $a \in f^{-1}(u)$ וכן $f\left(f^{-1}(u)\right) \subseteq u$.

הגדרה: יהי (X, T) מ״ט. ותהי $A \subseteq X$ תת קבוצה כלשהי, נרצה להגדיר ע״י A טופולוגיה. נעשה זאת כך: $T_A = \{u \cap A : u \in T\}$. נראה שזוהי אכן טופולוגיה. א

א. $A \in T_A\,, \phi \in T_A$
ב. יהי $\{V_\alpha\}_{\alpha\in I}$ אוסף קבוצות בT_α. כלומר לכל $\alpha \in I$ יש $u_\alpha \in I$ כך ש$u_\alpha \cap A = V_\alpha$. מתקיים $\cup_{\alpha\in I} V_\alpha = \cup_{\alpha\in I} (u_\alpha \cap A) = (\cup_{\alpha\in I}) \cap A \in T_A$.
ג. נניח $v_1, \dots, v_n \in T_A$ כלומר יש $u_1, \dots, u_n \subseteq T$ כך ש$v_i = u_i \cap A$. אזי $\cap_{1\le i<n} v_i = \cap_{1\le i\le n} (u_i \cap A) = (\cap_{1\le i\le n} u_i) \cap A \in T_A$.

הגדרה: אם $A \subseteq X$ אזי העתקה ההכלה $X \to A :\subseteq$ (או i) היא העתקה המוגדרת כך i(a)=a. היינו רוצים לקרוא לה הזהות, אך הזהות היא מקבוצה לעצמה. כן זה מקבוצה אחת לאחרת.

טענה: יהי X מ״ט, $A \subseteq X$ ת״מ (וזה אומר שהטופולוגיה שלקחנו על A היא המושרה מX). אזי העתקת ההכלה $i: A \to X$ היא רציפה.

הוכחה: תהי $u \subseteq X$ פתוחה בX. צ״ל $i^{-1}(u)$ פתוחה בA. ואכן $i^{-1}(u) = \{a \in A : i(a) \in u\} = \{a \in A : a \in u\} = A \cap u$.

טענה: יהיו X,Y מ״ט. $f: X \to Y$ רציפה, $A \subseteq X$ תת מרחב, אזי $f|_A: A \to Y$ קציפה.

הוכחה: אם נסמן ב i את ההכלה $i: A \to X$ אז $f|_A = f \circ i$ וההוכחה נובעת ישירות מטענות קודמות.

טענה: יהיו X,Y מ״ט. $f: X \to Y$ רציפה, ונניח ש$f(X) \subseteq B \subseteq Y$. אזי f משרה פונקציה $\hat{f}: X \to B$ ע״י $\hat{f}(x) \coloneqq f(a)$. $\hat{f}$ נקראת הפונקציה המתקבלת מf ע״י צמצום הטווח לB. אזי $\hat{f}$ רציפה.

תהי $V \subseteq B$ פתוחה בB. צ״ל $\hat{f}^{-1}(V)$ פתוחה בX. V פתוחה בB, פירושו שיש $u \subseteq Y$ פתוחה בY כך ש$V = u \cap B$. $\hat{f}^{-1}(V) = \{x \in X : \hat{f}(x) \in V\} = \{x \in X : f(x) \in u \cap B\} = \{x \in X : f(x) \in u\} = f^{-1}(u)$ והיא פתוחה בX כי f רציפה.

הגדרה: יהי X מ״ט. $A \subseteq X$ נקראת קבוצה סגורה בX אם A^C פתוחה בX.

טענה:

א. ϕ, X סגורות.
ב. אם $\{S_\alpha\}_{\alpha\in I}$ אוסף כלשהו של קבוצות סגורות, אזי $\cap_{\alpha\in I} S_\alpha$ קבוצה סגורה.
ג. אם $S_1, \dots, S_n$ אוסף סופי של קבוצות סגורות, אז $S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n$ סגורה.

הוכחה: כללי דה מורגן (כלומר, תרגיל).

טענה: יהיו X,Y מ״ט, $f: X \to Y$. אזי f רציפה או״א לכל $S \subseteq Y$ שהיא סגורה בY מתקיים $f^{-1}(S)$ סגורה בX.

הוכחה: תרגיל.

הגדרה: יהיו X,Y מ״ט. $f: X \to Y$.

א. f תקרא פתוחה אם לכל $u \subseteq X$ פתוחה בX מתקיים $f(u)$ פתוחה בY.
ב. f תקרא סגורה אם לכל $s \subseteq X$ סגורה בX מתקיים $f(s)$ סגורה בY.

טענה: יהי X מ״ט. $A \subseteq B \subseteq X$

א. אם A פתוחה בX אז A פתוחה בB.
ב. אם A פתוחה בB וB פתוחה בX אז A פתוחה בX.

הוכחה:

א. $A = A \cap B$.
ב. A פתוחה בB. כלומר יש $u \subseteq X$ פתוחה בX כך ש$A = u \cap B$. כלומר, הראנו את A כחיתוך של שתי קבוצות פתוחות בX , לכן A פתוחה בX.

תרגיל בית: יהי X מ״ט. $A \subseteq B \subseteq X$

א. אם A סגורה בX אז A סגורה בB.
ב. אם A סגורה בB וB סגורה בX אז A סגורה בX.

תרגיל: יהי X מ״ט. $A \subseteq X$ ותהי $S \subseteq A$ אזי S סגורה בA או״א יש $Q \subseteq X$ סגורה בX כך ש$S = Q \cap A$.

הגדרה: יהיו X,Y מ״ט. $f: X \to Y$ אזי f נקראת ״איזומורפיזם״ אם f חח״ע , על , וכל $u \subseteq X$ מתקיים שu פתוחה או״א f(u) פתוחה.

משפט: יהיו X,Y מ״ט $f: X \to Y$ אזי הטענות הבאות על f שקולות. F שמקיימת את התכונות הללו נקראת הומאומורפיזם.

א. f חח״ע, על, וההעתקה $f^{-1}: Y \to X$ גם רציפה.
ב. f חח״ע , על, רציפה ופתוחה.
ג. f חח״ע, על, רציפה וסגורה.
ד. f חח״ע, על ו$\forall A \subseteq X$ מתקיים A פתוחה בX או״א f(A) פתוחה בY.
ה. f רציפה , וקיימת $g: Y \to X$ רציפה כך ש $g \circ f = Id_x, f \circ g = Id_y$.

הגדרה: מרחבים טופולוגיים X,Y נקרים הומאומורפיים אם יש הומאומורפיזם $h: X \to Y$ (זהו יחס סימטרי)

טענה:

א. כל הקטעים הפתוחים למיניהם (כולל קרניים, $\mathbb{R}$ כולו, וכו׳) הומאומורפיים זה לזה.
ב. כל הקטעים הסגורים הומאומורפיים זה לזה.
ג. כל הקטעים החצי פתוחים/חצי סגורים למיניהם הומאומורפיים למיניהם.

הגדרה: יהי X מ״ט. $A \subseteq X$. נגדיר את הסגור של A בX שיסומן ב$\bar{A}$ באופן הבא : $\bar{A} = \bigcap_{\substack{S \text{ סגורה} \\ A \subseteq S}} S$, במילים: חיתוך כל הקבוצות הסגורות שמכילות את A.

טענה:

א. $A \subseteq \bar{A}$
ב. $\bar{A}$ סגורה.
ג. אם S סגורה ו$A \subseteq S$ אז $\bar{A} \subseteq S$.

(את א׳,ב׳,ג׳ ניתן לומר במילים כך: $\bar{A}$ היא הקבוצה הסגורה המינימלית שמכילה את A)

- הערה: $\bar{A} = A$ או״א A סגורה.

טענה: יהי X מ״ט. $A \subseteq X$, $p \in X$. אזי $p \in \bar{A}$ או״א לכל סביבה u של p מתקיים $u \cap A \neq \phi$.

הוכחה: נניח $p\in\bar{A}$. ונניח בשלילה שקיימת סביבה u של p כך ש-$u\cap A\neq\phi$. כלומר $A\subseteq u^C$, u^C סגורה. ומ(ג) של הטענה הקודמת נקבל שגם $\bar{A}\subseteq u^C$ וזה אומר ש-$\bar{A}\cap u=\phi$. סתירה כי $p\in u$ וגם $p\in\bar{A}$.

בכיוון השני, נניח שכל סביבה u של p קיימת, ש-$u\cap A\neq\phi$. נראה ש-$p\in\bar{A}$, ע"י כך שנניח שלא. ז"א נניח ש-$p\notin\bar{A}$, אזי $p\in\bar{A}^C$. מ(ב) נקבל ש-$\bar{A}^C$ היא פתוחה, כלומר $\bar{A}^C$ סביבה של p ואולם $\bar{A}^C\cap A=\phi$ כי $A\subseteq\bar{A}$.

הגדרה: יהי X מ"ט. יהי $A\subseteq X$ אזי A נקרא צפוף בX אם $\bar{A}=X$.

טענה: A צפוף בX אוו"א לכל קבוצה פתוחה לא ריקה u מתקיים ש-$u\cap A\neq\phi$.

טענה: יהי X מ"ט. $A\subseteq B\subseteq X$. נסמן ב-$\bar{A}^X$ את הסגור של A בX וב-$\bar{A}^B$ את הסגור של A בB. צ"ל ש-$\bar{A}^B=\bar{A}^X\cap B$.

הוכחה: $\bar{A}^B=\bigcap_{\substack{A\subseteq S\subseteq B\\ S\text{ סגורה}\\ \text{ב}B}} S=\bigcap_{\substack{Q\subseteq X\\ \text{סגורה ב}X\\ A\subseteq Q\subseteq B}} Q\cap B=\left(\bigcap_{\substack{Q\subseteq X\\ \text{סגורה ב}X\\ A\subseteq Q}}\right)\cap B=\bar{A}^X\cap B$.

מסקנה: יהי X מ"ט. $A\subseteq B\subseteq X$ אזי A צפוף בB אוו"א $B\subseteq\bar{A}^X$.

$S^n=\left\{(x_1,\dots,x_{n+1})\in\mathbb{R}^{n+1}:\ \sum x_i^2=1\right\}$ הספירה הn ממדית.

הגדרה: יהי X מ"ט. $A\subseteq X$. אזי הפנים של A שיסומן A° מוגדר כך: $A^\circ:=\bigcup_{\substack{u\subseteq A\\ u\text{ פתוחה ב}X}} u$. (יש לציין שהנקודה צריכה להיות מעל A, ולא מימין. אני לא יודע איך לעשות את זה במחשב ☺ עזרה תתקבל בברכה!)

טענה:

א. $A^\circ\subseteq A$
ב. A° פתוחה.
ג. אם $u\subseteq A$, u פתוחה אז $u\subseteq A^\circ$.

(במילים: א',ב',ג' אומרים ש-A° היא הקבוצה הפתוחה המקסימלית שמוכלת בA)

הוכחה: דומה לטענה דומה עבור סגור.

נקבל מכללי דה מורגן את הזהויות הבאה: $\left(A^\circ\right)^C=\overline{A^C}$ וגם $(\bar{A})^C=(A^C)^\circ$ ובאופן דומה $\bar{A}=\left((A^C)^\circ\right)^C$, $A^\circ=\left(\overline{A^C}\right)^C$.

טענה: יהי X מ"ט. $A\subseteq B\subseteq X$. נסמן $A^{\circ X}$ את הפנים בX וב-$A^{\circ B}$ הפנים בB. אזי מתקיים כי $A^{\circ X}\subseteq A^{\circ B}$.

דוגמה: שההכלה היא הכלה ממש: $[0.1]\subseteq[0,2]\subseteq\mathbb{R}$. מתקיים $[0,1]^{\circ\mathbb{R}}=(0,1)$, $[0,1]^{\circ[0,2]}=[0,1)$ וברור שמתקיימת הטענה.

משפט: יהי X מ"ט. יהי $\{u_\alpha\}_{\alpha\in I}$ כיסוי פתוח של X. (כלומר כל u_α פתוחה וכן $\bigcup_{\alpha\in I}U_\alpha=X$) יהי Y מ"ט נוסף ותהי $f:X\to Y$ פונקציה. אזי f רציפה אוו"א $f|_{u_\alpha}:u_\alpha\to Y$ רציפה לכל α.

הוכחה: $\Leftarrow$: ברור מההרצאה היום.

$\Rightarrow$: נניח שלכל $\alpha\in I$ מתקיים ש-$f|_{u_\alpha}$ רציפה צ"ל שf רציפה. תהי $v\subseteq Y$ פתוחה בY. צ"ל ש-$f^{-1}(v)$ פתוחה בX.

טענה: $f^{-1}(v)=\bigcup_{\alpha\in I}\left(f|_{u_\alpha}\right)^{-1}(v)$. נוכיח ע"י הכלה דו כיוונית:

$\Rightarrow$: עבור $x \in f^{-1}(v)$ מתקיים $f(x) \in v$ אך יש u_α כך ש$x \in u_\alpha$. $f|_{u_\alpha}(x) = f(x) = v$ ולכן $x \in \left(f|_{u_\alpha}\right)^{-1}(x)$ ולכן x באיחוד.

$\Leftarrow$: $x \in \cup_{\alpha \in I}\left(f|_{u_\alpha}\right)^{-1}(v)$. לכן קיים u_k כך ש$x \in \left(f|_{u_k}\right)^{-1}(v)$. כלומר $x \in u_k$ ו$f|_{u_k}(x) \in v$ גלומר $f(x) \in v$ ולכן $x \in f^{-1}(v)$.

לכן $\left(f|_{u_\alpha}\right)^{-1}(v)$ פתוחה בu_α. כי $f|_{u_\alpha}: u_\alpha \to Y$ רציפה. אולם u_α פתוחה בX גוררת כי $\left(f|_{u_\alpha}\right)^{-1}(v)$ פתוחה בX. ולכן גם איחודם פתוחה בXץ כלומר קיבלנו ש$f^{-1}(v)$ פתוחה בX.

משפט: יהי X מ״ט. יהיו $S_1, S_2, \dots, S_n$ אוסף סופי של קבוצות סגורות בX כך ש$X = S_1 \cup \dots \cup S_n$. ותהי $f: X \to Y$. אזי f רציפה או״א לכל $1 \le i \le n$ מתקיים ש$f|_{u_\alpha}: S_i \to Y$ קציפה.

הוכחה: זהה להוכחה עבור קבוצה פתוחה. צריך תמיד להשתמש בתכונות השקולות של רציפות הניתנות ע״י קבוצות סגורות. וכן הטענה שאם $A \subseteq B \subseteq X$ A סגורה בB וB סגורה בX אז A סגורה בX.

במקום שמופיע איחוד, שימו לב שזהו אינו איחוד סופי כנדרש.

נביט על $\mathbb{R} = (-\infty, 0] \cup [0, \infty)$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ כאשר $f(x) = \begin{Bmatrix} \sin(x) & , x \in [0, \infty) \\ x^2 & , x \in (-\infty, 0] \end{Bmatrix}$.

דוגמה: לכיסוי $S \cup u$ (אחת סגורה ואחת פתוחה) $f|_s$ ו$f|_u$ רציפים ובכל זאת f לא רציפה. נבחר $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ כאשר היא מוגדרת $g(x) = \begin{Bmatrix} 0 , x \in \{0\} \\ 1 , x \in R - \{0\} \end{Bmatrix}$.

<u>הרצאה 5 (2.4.2014)</u>:

הגדרה: מ״ט X נקרא קשיר אם לא קיימות בו שתי קבוצות u,v פתוחות, זרות, לא ריקות, כך ש$X = u \cup v$.

הערות: אם יש u,v כנ״ל, אז u,v גם סגורות. כלומר, אותה הגדרה עם קבוצות סגורות במקום פתוחות היא שקולה. U היא קבוצה פתוחה, סגורה, לא ריקה ולא הכל.

משפט: $\mathbb{R}$ קשיר.

הוכחה: נניח בשלילה יש $u, v \subseteq \mathbb{R}$ פתוחות, זרות, לא ריקות, כך ש$\mathbb{R} = u \cup v$. נגדיר $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ באופן הבא: $f(x) \coloneqq \begin{Bmatrix} 0 , x \in u \\ 1 , x \in v \end{Bmatrix}$. היא רציפה על v וu כי היא קבועה עליהם, ולכן היא רציפה על $\mathbb{R}$, אך היא מהווה סתירה למשפט ערך הביניים. נראה שלמעשה קיום פונקציה רציפה $f: X \to \mathbb{R}$ כך ש$f(X) = \{0,1\}$ שקול לאי קשירות.

כיוון 1: אם X לא קשיר אז יש f כנ״ל (כמו בהוכחה האחרונה)

כיוון 2: נניח יש f כזאת. נגדיר $v = f^{-1}\left(\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)\right)$, $u = f^{-1}\left(\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right)$.

דוגמה למרחב טופולוגי לא קשיר: $\mathbb{Q}$. נציג אותו כך: $\mathbb{Q} = \overbrace{\left\{x \in \mathbb{Q} : x < \sqrt{2}\right\}}^{u = \mathbb{Q} \cap (-\infty, \sqrt{2})} \cup \overbrace{\left\{x \in \mathbb{Q} : x > \sqrt{2}\right\}}^{v = \mathbb{Q} \cap (\sqrt{2}, \infty)}$

משפט: יהי X מ״ט קשיר. יהי Y עוד מ״ט. תהי $f: X \to Y$ רציפה, ועל Y. אזי Y גם קשיר.

הוכחה: נניח בשלילה שיש $u, v \subseteq Y$ פתוחים בY, זרים, ולא ריקים כך ש$Y = u \cup v$. אזי נביט ב$f^{-1}(u), f^{-1}(v)$ הן פתוחות בX (כי f רציפה), זרות (כי u,v זרות), לא ריקות (כי f על וu,v לא ריקות). ואיחודן X. ז״א $X = f^{-1}(Y) = f^{-1}(u \cup v) = f^{-1}(u) \cup f^{-1}(v)$. וזו סתירה לקשירות X!

מסקנה: יהי X מ״ט קשיר. Y עוד מ״ט. $f: X \to Y$ רציפה, אזי f(X) קשירה.

הוכחה: צמצום הטווח לf(X) ו$x \to f(x)$ שהיא על.

במילים: תמונה רציפה של מרחב קשיר הוא קשיר.

למה: יהי X מ"ט. נניח $X = u \cup v$ כאשר u,v פתוחות, זרות, לא ריקות. ונניח $A \subseteq X$ תת מרחב קשיר אזי $A \subseteq u$ או $A \subseteq v$.

הוכחה: נניח בשלילה שלא, כלומר $A \cap u \neq \phi$, $A \cap v \neq \phi$. אולם הן פתוחות בA זרות, ואיחדון A. סתירה לקשירות של A!

משפט: יהי X מ"ט. $A \subseteq X$ תת מרחב קשיר. A צפוף בX. אזי X קשיר.

הוכחה: נניח בשלילה יש $u, v \subseteq X$ פתוחות , זרות, לא ריקות כך ש$x = u \cup v$. אזי מהלמה בה"כ $A \subseteq u$. וקיבלנו שהקבוצה הפתוחה הלא ריקה V מקיימת $A \cap v = \phi$, וזו סתירה לצפיפות A!

טענה: יהי X מ"ט. $A, B \subseteq X$ תתי מרחב קשירים. $A \cup B = X$, $A \cap B \neq \phi$ אזי X קשיר.

הוכחה: נניח בשלילה יש u, v פתוחות, זרות ולא ריקות כך ש$X = u \cup v$. מהלמה, בה"כ $A \subseteq u$. 1. אם $B \subseteq u$ נקבל סתירה לכך ש$A \cup B = X$. 2. אם $B \subseteq v$ נקבל סתירה לכך ש$A \cap B = \phi$.

מסקנה: יהי X מ"ט. $A, B \subseteq X$ קשירים, $A \cap B = \phi$ אזי $A \cup B$ קשיר.

הוכחה: הפעילו את המשפט על X שהוא $A \cup B$.

משפט: יהי X מ"ט. ונניח שבX מתקיימת התכונה הבאה: לכל $a, b \in X$ יש תת מרחב קשיר $A \subseteq X$ כך ש$a, b \in A$. אזי X קשיר.

הוכחה: נניח בשלילה שקיימים u,v פתוחות, זרות , לא ריקות כך ש$x = u \cup v$. ניקח $a \in u , b \in v$. לפי ההנחה, יש תת מרחב קשיר $A \subseteq X$ כך ש$a, b \in A$. מצד שני, $A \subseteq u$ או $A \subseteq V$. סתירה!

יהי X מ"ט כלשהו. נגדיר על X יחס באופן הבא עבור $a, b \in X$ נגדיר $a \equiv b$ אם קיים תת מרחב קשיר $A \subseteq X$ כך ש$a, b \in A$.

טענה: זהו יחס שקילות.

הוכחה:

1. $a \in \{a\} , a \equiv a$.
2. $a \equiv b$, כלומר $a, b \in A$ וA קשיר לכן $a \equiv b$.
3. $a \equiv b$ כלומר יש $A \subseteq X$ קשיר כך ש$a, b \in A$. $b \equiv c$ ז"א יש $B \subseteq X$ כך ש$b, c \in B$. $a, c \in A \cup B$ ו$A \cup B$ קשיר, כי A,B קשירים ומקיימים $A \cap B \neq \phi$ כי $b \in A \cap B$.

מהן התכונות של מחלקת השקילות של היחס ≡?

1. כל תת מרחב קשיר מוכל באחת ממחלקות השקילות.
   הוכחה: יהי $A \subseteq X$ קשיר, אזי לכל $a, b \in A$ מתקיים $a \equiv b$. כלומר, כל הנקודות בA שקולות זו לזו כלומר A מוכל באחת ממחלקות השקילות.
2. אם C מחלקת שקילות אז C קשיר.
   הוכחה: נראה שלכל $a, b \in C$ יש תת מרחב קשיר $A \subseteq C$ כך ש$a, b \in A$. אכן יש כזה: אם $a, b \in C$ ז"א $a \equiv b$, כלומר יש $A \subseteq X$ קשיר כך ש$a, b \in A$. אולם מתכונה 1 A מוכלת באחת ממחלקות השקילות. אולם , כיוון ש$A \cap C \neq \phi$ כי $a, b \in A \cap C$ בהכרח, $A \subseteq C$. C היא המחלקה שבה A מוכל.

למחלקות השקילות ביחס ליחס השקילות ≡ שהגדרנו אנו קוראים "מרכיבי הקשירות של X".

3. מרכיבי הקשירות הם קבוצות סגורות.

יהי C מרכיב קשירים, אזי C צפוף ב$\bar{C}$, ולכן $\bar{C}$ קשיר. מכאן ש$\bar{C}$ מוכל באחד ממרכיבי הקשירות, בהכרח מרכיב זה הוא X. כלומר $\bar{C} \subseteq C$. כלומר $\bar{C} = C$ ולכן C סגור.

4. אם יש מספר סופי של מרכיבי קשירות אז הם גם פתוחים:
הוכחה: נניח $C_1, \dots, C_n$ הם מרכיבי הקשירות. אזי $C_1 \cup \dots \cup C_n$ סגורה, ולכן C_n פתוחה. באותו האופן מראים לכל $1 \le i \le n$ שC_i פתוחה.
5. X קשיר או"א יש רק מרכיב קשירות אחד.

טענה: תתי המרחבים הקשירים היחידים של $\mathbb{Q}$ הם הנקודונים.

הוכחה: יהי $A \subseteq \mathbb{Q}$ תת מרחב עם יותר מנקודה אחת. נניח $a < b \in A$. ניקח $r \in \mathbb{R}$ אי רציונאלי, כך ש$a < r < b$ ונביט ב$A \cap (r,\infty)$, $A \cap (-\infty, r)$.

מסקנה: מרכיבי הקשירות של $\mathbb{Q}$ הם הנקודונים.

הגדרה: יהי X מ"ט. מסילה בX היא פונקציה רציפה $\varphi: [0,1] \to X$. עבור $a, b \in X$ אנו נאמר שφ מסילה בX מa לb אם φ מסילה בX ו$\varphi(0) = a$, $\varphi(1) = b$.

הגדרה: יהי X מ"ט. $a, b, c \in X$ וφ מסילה מa לb וψ מסילה מb לc (ז"א $\varphi(1) = \psi(0)$) אזי, נגדיר את השרשור של φ וψ באופן הבא: $\varphi * \psi(t) \coloneqq \begin{cases} \varphi(2t), 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \varphi(2t-1), 0 \le t \le 1 \end{cases}$ (זה **לא** קונבולוציה *או* הרכבה!!)

הגדרה: אם $\varphi: [0,1] \to X$ מסילה, נגדיר: $\bar{\varphi}: [0,1] \to X$ ע"י $\bar{\varphi}(\mathrm{t}) \coloneqq \varphi(1-\mathrm{t})$.

הגדרה: יהי X מ"ט. אנו נאמר שX קשיר מסילתית אם לכל $a, b \in X$ יש מסילה בX מa לb. (כלומר יש $\varphi: [0,1] \to X$ רציפה כך ש$\varphi(0) = a, \varphi(1) = b$)

משפט: אם X קשיר מסילתית אז X קשיר.

הוכחה: נניח בשלילה שX לא קשיר. כלומר קיימות u,v פתוחות זרות שלא ריקות, כך ש$X = u \cup v$. יהיו $a \in u, b \in v$.

תהי $\varphi: [0,1] \to X$ מסילה מa לb. כלומר $\varphi: [0,1] \to X$ כך ש$\varphi(0) = a, \varphi(1) = b$. נביט ב$\varphi^{-1}(u), \varphi^{-1}(v)$. הן פתוחות, זרות, לא ריקות ומוכלות ב$[0,1]$. איחודן הוא כל $[0,1]$, וזו סתירה לקשירות $[0,1]$.

עבור מ"ט X נגדיר יחס ~ על X באופן הבא: $a \sim b$ אם יש מסילה מa לb.

טענה: זהו יחס שקילות.

הוכחה:

1. $a \sim a$, ניקח את המסילה הקבועה $k_a: [0,1] \to X$.
2. נניח $a \sim b$ כלומר יש $\varphi: [0,1] \to X$ כך ש$\varphi(0) = a, \varphi(1) = b$. אזי בנינו $\bar{\varphi}: [0,1] \to X$ המקיימת $\bar{\varphi}(0) = b$, $\bar{\varphi}(1) = a$. כלומר קיבלנו ש$b \sim a$.
3. נניח $a \sim b$. כלומר יש מסילה φ מa לb ו$b \sim c$ כלומר יש מסילה ψ מb לc. אזי $\varphi * \psi$ מסילה מa לc. כלומר קיבלנו ש$a \sim c$.

תכונות:

1. אם $\varphi: [0,1] \to X$ מסילה, אז $\varphi([0,1])$ מוכלת באחת ממחלקות השקילות. כלומר, כל הנקודות ב$\varphi([0,1])$ שקולות זו לזו. כלומר, לכל $s, t \in [0.1]$ מתקיים $\varphi(s) \sim \varphi(t)$. נניח בה"כ $t < s$.
$\varphi|_{[t,s]}: [t,s] \to X$ היא "מסילה" מ$\varphi(t)$ ל$\varphi(s)$. אם נרצה מסילה בלי מרכאות ניקח פונקציה לינארית $[0,1] \to [t,s] \to_{\varphi} X$.
2. כל מחלקת שקילות היא קשירה מסילתית.

הוכחה: יהי C מחלקת שקילות ויהיו $a,b \in C$. צ"ל שיש מסילה $\varphi:[0,1] \to X$ כך ש$\varphi(0)=a, \varphi(1)=b$. מתוך $a,b \in C$ אנחנו יודעים ש$a \sim b$, ופירושו שיש מסילה $\varphi:[0,1] \to X$ כך ש$\varphi(0)=a, \varphi(1)=b$. כיוון ש$\varphi([0,1]) \cap C \neq \phi$ בהכרח מתכונה 1 ש$\varphi([0,1]) \subseteq C$. לכן ע"י צמצום הטווח ניתן לחשוב על φ כמסילה בC.

מחלקות השקילות של יחס השקילות $\sim$ שהגדרנו כעת נקראים מרכיבי הקשירות המסילתית.

3. אם $A \subseteq X$ קשיר מסילתית אז הוא מוכל באחד ממרכיבי הקשירות המסילתית.

הוכחה: יהי $A \subseteq X$ קשיר מסילתית. אזי לכל $a,b \in A$ יש מסילה בA מa לb. בפרט, זוהי מסילה בX מa לb. לכן $a \sim b$. כלומר כל איברי A שקולים זה לזה לכן A מוכל באחת ממחלקות השקילות.

4. X קשיר מסילתית או"א יש רק מרכיב קשירות מסילתית אחד.

<u>הרצאה 6 (23.4.2014):</u>

משפט: יהי X מ"ט קשיר מסילתית וY עוד מ"ט. תהי $f: X \to Y$ רציפה ועל Y, אזי Y קשיר מסילתית.

הוכחה: יהיו $a,b \in Y$. f על, ולכן יש $p,q \in X$ כך ש$f(p)=a, f(q)=b$. X קשיר מסילתית, לכן יש $\gamma:[0,1] \to X$ רציפה, כך ש$\gamma(1)=q$, $\gamma(0)=p$. אזי $f \circ \gamma:[0,1] \to Y$ רציפה ומקיימת $f \circ \gamma(0)=a$, $f \circ \gamma(1)=b$.

מסקנה: אם X קשיר מסילתית, Y עוד מ"ט, $f: X \to Y$ רציפה, אזי $f(X)$ קשיר מסילתית. (במילים: תמונה רציפה של מרחב קשיר מסילתית הוא קשיר מסילתית). ההוכחה היא ע"י צמצום הטווח לf(X).

משפט: תהי $A \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה. אזי מרכיבי הקשירות המסילתית של A הם קבוצות פתוחות ב$\mathbb{R}^n$ (ולכן גם פתוחות בA).

הוכחה: יהי $B \subseteq A$ רכיב קשירות מסילתית של A. יהי $p \in B$. קיים $r>0$ כך ש$B^{\mathbb{R}^n}(p,r) \subseteq A$ (כי A פתוחה ב$\mathbb{R}^n$) $B(p,r)$ קשיר מסילתית. ולכן מוכל בשאר רכיבי קשירות המסילתית. רכיב זה בהכרח בB, כי $p \in B$.

מסקנה: יהי $A \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה. אזי רכיבי הקשירות ורכיבי הקשירות המסילתית של A מתלכדים. בפרט, A קשיר או"א A קשיר מסילתית.

הערה: התכונה של קבוצה פתוחה ב$\mathbb{R}^n$ שהשתמשנו היא התכונה שלכל נקודה $p \in A$ יש סביבה קשירה מסילתית.

דוגמה למרחב טופולוגי קשיר אך לא קשיר מסילתית:

נגדיר $X \subseteq \mathbb{R}^2$ כך: $X = \Bigg\{\underbrace{(0,1)}_{p}\Bigg\} \cup \overbrace{[0,1] \times \{0\} \cup \bigcup_{\underset{\text{טבעי}}{n \geq 1}} \left\{\frac{1}{n}\right\} \times [0,1]}^{Y}$ אנחנו יודעים שY תת מרחב קשיר וY צפוף בכל X, לכן X קשיר. נראה שאם $\gamma:[0,1] \to X$ מקיימת ש$\gamma(0)=p$ אז $\gamma = K_p$. נסמן, ש$A = \gamma^{-1}(\{p\})$. ז"א שצ"ל כי $A=[0,1]$. נראה ש$A \subseteq [0,1]$ פתוחה, סגורה ולא ריקה. היא לא ריקה כי $0 \in A$, היא סגורה כי היא תמונה הפוכה של הנקודון $\{p\}$ והוא סגור. נותר להראות שהיא פתוחה ב$[0,1]$. כלומר, שלכל $t \in A$ יש $r>0$ נוכל לקבל שכך ש$A \subseteq [0,1] \cap (t-r,t+r)$ וברור ש$[0,1] \cap (t-r,t+r) = B^{[0,1]}(t,r)$.

נגדיר $Z \subseteq X$ באופן הבא: $Z = \left\{(x,y) \in X : y > \frac{1}{2}\right\}$ וZ פתוחה בX כאשר $f(t)=p \in Z$. כלומר, Z סביבה של $\gamma(t)$ כאשר γ רציפה, ולכן יש $r>0$ כך ש$\gamma\big([0,1] \cap (t-r,t+r)\big) \subseteq Z$. בהינתן n, נביט בשתי הקבוצות $Z \cap \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\right\} = u_1, u_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^n : X < \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\right\}$. זוהי הצגה של Z כאיחדו של שתי קבוצות בפתוחות וזרות. ולכן תת המרחב הקשיר $\gamma\big([0,1] \cap (t-r,t+r)\big)$ מוכל באחת מהן. כיוון ש$\gamma(t) \in u_1$ בהכרח כי $\gamma\big([0,1] \cap (t-r,t+r)\big) \subseteq u_1$ ומכאן ש$\gamma\big([0,1] \cap (t-r,t+r)\big) \subseteq \bigcap_n u_n = \{p\}$. כלומר, $[0,1] \cap (t-r,t+r) \subseteq A$ וזאת לכל $t \in A$ מכאן שA פתוחה ב$[0,1]$.

הגדרה: יהי X מ"ט. כיסוי פתוח של X הוא אוסף $\{u_\alpha\}_{\alpha \in I}$ של קבוצות פתוחות בX כך ש$\bigcup_{\alpha \in I} u_\alpha = X$.

הגדרה : X יקרא קומפקטי אם לכל כיסוי פתוח $\{u_\alpha\}_{\alpha\in I}$ של X יש תת כיסוי סופי. כלומר, יש $F \subseteq I$ סופית כך ש$\cup_{\alpha\in F} u_\alpha = X$.

הגדרה : יהי X מ״ט, יהי $A \subseteq X$ תת מרחב. כיסוי פתוח של **A בX** הוא אוסף $\{u_\alpha\}_{\alpha\in I}$ של קבוצות פתוחות בX כך ש$A \subseteq\cup_{\alpha\in I} u_\alpha$.

I. תת כיסוי סופי בX הוא אוסף $F \subseteq I$ סופי כך ש$A \subseteq\cup_{\alpha\in F}\ u_\alpha$.

משפט : יהי X מ״ט. $A \subseteq X$. אזי A מרחב קומפקטי או״א לכל כיסוי פתוח של A בX יש תת כיסוי סופי.

הוכחה : נניח A קומפקטי. ויהי $\{u_\alpha\}_{\alpha\in I}$ כיסוי פתוח של A בX. צ״ל שיש לו תת כיסוי סופי בX. צ״ל שיש לו תת כיסוי סופי בX. האוסף $\{A \cap u_\alpha\}_{\alpha\in I}$ הוא כיסוי פתוח של A. כלומר, אלו קבוצות פתוחות בA ואיחודן **שווה** A. A קומפקטי, לכן יש $F \subseteq I$ סופי כך ש$\cup_{\alpha\in F} A \cap u_\alpha = A$ כלומר $A \subseteq\cup_{\alpha\in F} u_\alpha$.

כיוון שני : נניח שמתקיים התנאי הנ״ל לגבי כיסויים בX ונראה שA קומפקטית. יהי $\{V_\alpha\}_{\alpha\in I}$ כיסוי פתוח של A כלומר ש$V_\alpha \subseteq A$ פתוח בA ו$\cup_{\alpha\in I} V_\alpha = A$. לכל $\alpha\in I$ יש $u_\alpha \subseteq X$ כך ש$V_\alpha = A \cap u_\alpha$. (מהגדרת הטופולוגיה של תת מרחב)

לכל $\alpha \in I$, $V_\alpha \subseteq u_\alpha$ לכן $A \subseteq\cup_{\alpha\in I} u_\alpha$. לכן מההנחה, יש תת קבוצה סופית $F \subseteq I$ כך ש$A \subseteq\cup_{\alpha\in F} u_\alpha$.

בסה״כ $A = (\cup_{\alpha\in F}\ u_\alpha) \cap A = A \cap u_\alpha \cup_{\alpha\in F} = V_\alpha \cup_{\alpha\in F}$. .

<u>הרצאה 7 (30.4.2014) :</u>

משפט : יהי X מ״ט קומפקטי. יהי Y עוד מ״ט. תהי $f: X \to Y$ פונקציה רציפה ועל Y. אזי Y קומפקטי.

הוכחה : יהי $\{u_\alpha\}_{\alpha\in I}$ כיסוי פתוח של Y. נביט באוסף $\{f^{-1}(u_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ וזהו כיסוי פתוח של X. f רציפה, לכן $f^{-1}(u_\alpha)$ פתוחים וגם $\cup_{\alpha\in I} f^{-1}(u_\alpha) = f^{-1}(\cup_{\alpha\in I} u_\alpha) = f^{-1}(Y) = X$. (פה **לא** השתמשנו בכך שf על)

X קומפקטי, לכן יש $F \subseteq I$ סופית כך ש$X = \cup_{\alpha\in F} f^{-1}(u_\alpha)$. כיוון שf על, $Y = f(X) = f(\cup_{\alpha\in F} f^{-1}(u_\alpha) =$ $\cup_{\alpha\in F} f\left(f^{-1}(u_\alpha)\right) = \cup_{\alpha\in F} u_\alpha$.

מסקנה : יהי X מ״ט קומפקטי, Y עוד מ״ט, $f: X \to Y$ רציפה. אזי f(X) קומפקטי. במילים : תמונה רציפה של מרחב קומפקטי הוא קומפקטי.

משפט : יהי X מ״ט קומפקטי. תהי $A \subseteq X$ ת״ק סגורה בX. אזי A קומפקטי.

הוכחה : נראה שA מקיימת את התנאי לגבי כיסויים פתוחים בX. יהי $\{u_\alpha\}_{\alpha\in I}$ כיסוי פתוח של A בX. כלומר, u_α פתוחות בX ו$A \subseteq\cup_{\alpha\in I} u_\alpha$. נביט באוסף $\{A^c\} \cup \{u_\alpha\}_{\alpha\in I}$ זהו כיסוי פתוח של X . יש לו תת כיסוי סופי. אם A^c מופיע בתת הכיסוי הזה, נשמיט אותו ונקבל תת כיסוי סופי של A מבין הקבוצות $\{u_\alpha\}_{\alpha\in I}$.

הגדרה : מ״ט X נקרא האוסדורף (או T_2) אם לכל $a \neq b \in X$ קיימות u, v כך ש$a \in u, b \in v$ מתקיים $u \cap v = \phi$. (במילים : יש לa וb סביבות זרות)

דוגמאות : מרחב מטרי הוא האוסדורף, ומרחב טריוויאלי עם יותר מנקודה אחת אינו האוסדורף.

הגדרה : מ״ט X נקרא T_1 אם כל נקודון בו הוא קבוצה סגורה.

טענה : $T_2 \Leftarrow T_1$

הוכחה : נוכיח הגדרה שקולה לT_1 שממנה יהיה ברור ש$T_2 \Rightarrow T_1$.

הגדרה שקולה לT_1: לכל $a \neq b \in X$ יש u פתוחה כך ש$a \in u$ ו$b \notin u$. נראה שהגדרה זו שקולה להגדרה ״כל נקודון הוא קבוצה סגורה״. נניח שהנקודונים סגורים. יהי $a \neq b \in X$ אז ניקח $u = \{b\}^c$. יהי $\{b\}$ נקודון. נראה שהוא ק״ס,

ע״י זה שנראה ש$\{b\}^c$ פתוחה. יהי $a \in \{b\}^c$. אזי קיימת u_a כך ש$a \in u_a$, ו$b \notin u_a$. כלומר $u_a \subseteq \{b\}^c$. אזי $\{b\}^c = \cup_{a\in\{b\}^c} u_a$ וזה נכון מהלמה השימושית. לכן $\{b\}^c$ פתוחה.

דוגמה למ״ט שהוא T_1 אך לא T_2: תהי X קבוצה אינסופית. וניקח על X את הטופולוגיה הקו סופית (ϕ וכל הקבוצות שהמשלים שלהן סופי) לכן הסגורות הן הסופיות וX עצמו! . לכן, בפרט, X הוא T_1, אך הוא אינו T_2. כי החיתוך של כל שתי קבוצות פתוחות לא ריקות הוא לא ריק. אם נניח A,B פתוחות לא ריקות, אזי A^C, B^C סופיות. עכשיו אפשר לרשום ש$(A\cap B)^c = A^c \cup B^c$ לכן $(A\cap B)^c$ איננו כל X. ולכן $A \cap B \neq \phi$.

טענה: יהי X מ״ט האוסדורף, $A \subseteq X$, אזי A האוסדורף.

הוכחה: יהיו $a \neq b \in A$. X האוסדורף, לכן יש $u, v \subseteq X$ פתוחות בX, כך ש$a \in u, b \in v$ וגם$v \cap u = \phi$. נביט בA$u' = u \cap A\ , v' = v \cap A$. אזי $u', v' \subseteq A$ פתוחות בA ו$u' \cap v' = \phi$ וגם $a \in u', b \in v'$. מ.ש.ל.

משפט: יהי X מ״ט האוסדורף. תהי $A \subseteq X$ קומפקטי. אזי A סגורה בX.

הוכחה: צ״ל שA^c פתוחה. תהי $p \in A^c$. כיוון שX האוסדורף, לכל $a \in A$ יש u_a, v_a פתוחות זרות כך ש$p \in$ $a \in u_a,$ v_a. האוסף $\{u_\alpha\}_{\alpha\in A}$ הוא כיסוי פתוח של A בX. כיוון שA קומפקטי, קיימים $a_1, \dots, a_n$ כך ש$A \subseteq u_{a_1} \cup \dots \cup u_{a_n}$. מכללי דה מורגן ידוע כי $\left(v_{a_1} \cap \dots \cap v_{a_n}\right)^c = v_{a_1}^c \cup \dots \cup v_{a_n}^c$, ולכן $A \subseteq u_{a_1} \cup \dots \cup u_{a_n} \subseteq v_{a_1}^c \cup \dots \cup v_{a_n}^c$ כלומר $v_{a_1} \cap \dots \cap v_{a_n} \subseteq A^c$. כלומר, זוהי סביבה של p בA^c. p נמצא בכל אחד מן הv_{a_i} לכן גם בחיתוך, וכיוון שזה חיתוך של אוסף סופי של קבוצות פתוחות, זוהי קבוצה פתוחה.

עד כה, הראנו שבהינתן $p \in A^c$ קיימת סביבה של p שמוכלת בA^c. זה נכון לכל $p \in A^c$ לכן מהלמה השימושית A^c פתוחה.

משפט: יהי X קומפקטי, Y האוסדורף, $f: X \to Y$ רציפה. אזי f סגורה.

הוכחה: תהי $A \subseteq X$ סגורה, צ״ל ש$f(A)$ סגורה בY. $A \subseteq X$ סגורה בX, X קומפקטי, לכן A קומפקטי. לכן $f(A)$ קומפקטי (תמונה רציפה של מרחב קומפקטי). $f(A)$ תת מרחב קומפקטי של Y שהוא האוסדורף ולכן $f(A)$ סגורה בY.

מסקנה 1: אם X קומפקטי, Y האוסדורף, $f: X \to Y$ רציפה, חח״ע ועל אזי f הומאומורפיזם.

הגדרה: $f: X \to Y$ נקרא שיכון אם ההעתקה $f: X \to f(X)$ המתקבלת מצמצום הטווח היא הומאומורפיזם. (בפרט f חח״ע ורציפה)

מסקנה 2: יהי X קומפקטי. Y האוסדורף. $f: X \to Y$ חח״ע ורציפה אזי f שיכון.

הוכחה: $f(X) \subseteq Y$ האוסדורף. (תת מרחב של מרחב האוסדורף) ואז נשתמש במסקנה 1.

הגדרה: יהי (X, T) מ״ט. אוסף B של תתי קבוצות של X נקרא בסיס לטופולוגיה T אם:

א. $B \subseteq T$
ב. כל קבוצה בT היא איחוד של קבוצות מB.

תנאי שקול:

א) $B \subseteq T$
ב) לכל $U \in T$ ולכל $a \in U$ קיים $V \in B$ כך ש$a \in V \subseteq U$.

הוכחת השקילות תהיה (א.+ב.->א)+ב)): תהי $U \in T$, $a \in U$. מב. קיים אוסף $\{v_\alpha\}_{\alpha\in I}$ כך ש$v_\alpha \in B$ לכל α. ע״פ הלמה השימושית $U = \cup_{\alpha\in I} v_\alpha$ אזי קיים $\beta \in I$ כך ש$a \in v_\beta$ וכמובן שמתקיים $v_\beta \subseteq U$.

בכיוון השני: (א)+ב)->א.+ב.): תהי $U \in T$ מתוך ב) נקבל שלכל $a \in U, V_a \in B$ כך ש$a \in V_a \subseteq U$. מהלמה השימושית נקבל ש$\cup_{a\in U} V_a = U$ וזהו בדיוק ב. מ.ש.ל.

דוגמאות:

1. M מרחב מטרי. B אוסף כל הכדורים הפתוחים (סביב כל הנקודות ובכל הרדיוסים)
2. $(\mathbb{R}, sorg)$ בסיס הוא אוסף הקטעים מהצורה $[a,b)$.

משפט: ל$\mathbb{R}^n$ יש בסיס בן מניה והוא האוסף הבא: כל הכדורים שמרכזם ב$\mathbb{Q}^n$ ורדיוסם ב$\mathbb{Q}$.

ניתן לסמן אותו כך: $B=\{(x,r): x\in\mathbb{Q}^n \ , r\in\mathbb{Q}\}$. זהו אכן אוסף בן מניה.

הוכחה: נראה שזהו בסיס (נשתמש בהגדרה א)ב)) תהי $u\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה ויהי $a\in u$ צריך למצוא $p\in\mathbb{Q}^n$ ו$r\in\mathbb{Q}$ כך ש$a\in B(p,r)\subseteq u$.

קיים $\varepsilon>0$ כך ש$B(a,\varepsilon)\subseteq u$. נבחר נקודה $p\in\mathbb{Q}^n$ כך ש$d(a,p)<\frac{\varepsilon}{2}$ (ע"פ צפיפות $\mathbb{Q}^n$ ב$\mathbb{R}^n$) נבחר $r\in\mathbb{Q}$ כך ש$\frac{\varepsilon}{2}<r<d(a,p)$ (ע"פ צפיפות $\mathbb{Q}$ ב$\mathbb{R}$). נקבל ש$B(a,\varepsilon)\subseteq u$ $\overset{\text{אי שוויון המשולש}}{\subseteq}$ $a\in B(p,r)$.

משפט: נסמן בT את הטופולוגיה הרגילה של $\mathbb{R}^n$. אזי $|T|=\aleph$.

הוכחה: האוסף $\{B(0,\varepsilon) : \varepsilon\in\mathbb{R}, \varepsilon>0\}$ הוא אוסף של קבוצות פתוחות שעוצמתו $\aleph$, לכן $|T|\geq\aleph$. מצד שני, נסמן בB בסיס בן מניה של T. (הוכחנו במשפט הקודם שקיים כזה) ונגדיר $G: p(B)\to T$ שהיא על כך: $G(D)=\cup D$. היא על מהגדרת הבסיס. מכאן, ש$\aleph\leq|T|$, והוכחנו ש$|T|=\aleph$.

טענה: יהיו X,Y מ"ט. יהי B בסיס לטופולוגיה של Y. ותהי $f: X\to Y$ אזי f רציפה או"א לכל $v\in B$ מתקיים ש$f^{-1}(v)$ פתוחה בX.

הוכחה: 1. ברור. אם fרציפה אז ודאי שמתקיים התנאי הנ"ל. כיוון 2: נניח מתקיים התנאי, ונראה שf רציפה. תהי $u\subseteq Y$ פתוחה וצ"ל ש$f^{-1}(u)$ פתוחה. B בסיס לטופולוגיה של Y, לכן יש אוסף $\{V_\alpha\}_{\alpha\in I}$ כאשר $V_\alpha\in B$ לכל α כך ש$u=\cup_{\alpha\in I} v_\alpha$. אזי: $f^{-1}(u)=f^{-1}(\cup_{\alpha\in I} v_\alpha)=\cup_{\alpha\in I} f^{-1}(v_\alpha)$ וזה איחוד של קבוצות פתוחות מההנחה, ולכן $f^{-1}(u)$ פתוחה. מ.ש.ל.

טענה: יהיו X,Y מ"ט. יהי B בסיס לטופולוגיה של X. ותהי $f: X\to Y$ אזי f פתוחה או"א לכל $v\in B$ מתקיים ש$f(v)$ פתוחה בY.

<u>הרצאה 8 (7.5.2014):</u>

משפט: תהי X קבוצה. יהי B אוסף של תת קבוצות של X. אזי B היא בסיס לטופולוגיה על X או"א B מקיימת את שתי התכונות הבאות:

א. $\cup_{v\in B} v=X$
ב. לכל $u,v\in B$ יש אוסף $\{w_\alpha\}_{\alpha\in I}$, $w_\alpha\in B$ כך ש$u\cap v=\cup_{\alpha\in I} w_\alpha$.

הוכחה: כוון ראשון, א' וב' הכרחיים. אזי, אם יש טופולוגיה T, וB בסיס שלה אז ודאי T היא אוסף כל האיחודים של קבוצות מB, $X\in T$ לכן א'. לכל $u,v\in B$ יתקיים $u,v\in T$ ולכן $u\cap v\in T$ ולכן ב'.

כוון שני: יהי B אוסף של תת קבוצות של X המקיים א' וב'. יהי T אוסף כל האיחודים של קבוצות מB. צ"ל שT טופולוגיה.

א. $\phi\in T$ איחוד על האוסף הריק, וכן $x\in T$ ע"פ א'.
ב. אם $\{u_\alpha\}_{\alpha\in I}$ אוסף קבוצות מT, אז לכל α $u_\alpha=\cup_{\beta\in I_\alpha} v_\beta^\alpha$ כאשר $v_\beta^\alpha\in B$. מתקיים $\cup_{\alpha\in I} u_\alpha=$ $\cup_{\alpha\in I}\cup_{\beta\in I_\alpha} v_\beta^\alpha\in T$.
ג. מספיק להראות שאם $u,v\in T$ אז $u\cap v\in T$ (לקבלת חיתוכים סופיים כלשהם: אינדוקציה).
$u\in T$ פרושו $u=\cup_{\alpha\in I} u_\alpha$ כאשר $u_\alpha\in B$.
$v\in T$ פרושו $v=\cup_{\beta\in J} v_\beta$ כאשר $v_\beta\in B$.

לכן $u \cap v = \cup_{\alpha\in I,\beta\in J} u_\alpha \cap v_\beta$.

מב׳ לכל זוג (α,β) יש אוסף $\left\{w_\gamma^{\alpha,\beta}\right\}_{\gamma\in I_{\alpha,\beta}}$ ו$w_\gamma^{\alpha,\beta} \in B$ כך ש $u_\alpha \cap v_\beta = \cup_{\gamma\in I_{\alpha,\beta}} w_\gamma^{\alpha,\beta}$ ולכן בסה״כ נקבל ש$u \cap v = \cup_{\alpha\in I,\beta\in J}\cup_{\gamma\in I_{\alpha,\beta}} w_\gamma^{\alpha,\beta} \in T$.

ניסוח שקול לא׳+ב׳: (א) לכל $a \in X$ יש $u \in B$ כך ש$a \in u$.

(ב) ולכל $u, v \in B$ ולכל $a \in u \cap v$ קיים $w \in B$ כך $a \in w \subseteq u \cap v$.

השקילות תהיה תרגיל.

מסקנה: תהי X קבוצה, יהי B אוסף של תתי קבוצות של X. אם B מקיים: 1. $\cup_{u\in B} u = X$. 2. לכל $u, v \in B$ מתקיים $u \cap v \in B$. אז B בסיס לטופולוגיה על X.

דוגמה: $X = \mathbb{R}$ ו$B = \{[a,b): a \le b \in \mathbb{R}\}$.

יהיו $(X_1,T_1),(X_2,T_2),\dots,(X_n,T_n)$ מ״ט. נרצה להגדיר טופולוגיה על הקבוצה $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n = \{(a_1,\dots,a_n): a_1 \in X_1,\dots,a_n \in X_n\}$.

נגדיר B את אוסף תתי הקבוצות הבא של $X_1 \times \dots \times X_n$: $B = \{u_1 \times \dots \times u_n: u_1 \in T_1,\dots,u_n \in T_n\}$. B בסיס לטופולוגיה על $X_1 \times \dots \times X_n$ כי B מקיים את התנאי המספיק:

1. $X_1 \times \dots \times X_n \in B$
2. $(u_1 \times \dots \times u_n) \cap (v_1 \times \dots \times v_n) = (u_1 \cap v_1) \times \dots \times (u_n \cap v_n)$

עבור מכפלה של קבוצות $X_1 \times \dots \times X_n$ מוגדרות פונקציות ההטלה p_i עבור $1 \le i \le n$ כאשר $p_i: X_1 \times \dots \times X_n \to X_i$ ז״א $p_i\big((a_1,\dots,a_n)\big) = a_i$.

משפט: הטלות p_i רציפות ופתוחות.

הוכחה: תהי $u \subseteq X_i$ פתוחה. אזי $p_i^{-1}(u) = \mathrm{X}_1 \times \dots \times X_{i-1} \times u \times X_{i+1} \times \dots \times X_n$ וזוהי קבוצת בסיס, ולכן פתוחה.

ראינו, שאם $f: X \to Y$ וB בסיס לטופולוגיה של X, אז כדי לבדוק אם f פתוחה מספיק לבדוק ש$f(V)$ פתוחה לכל $V \in B$. במקרה שלנו, צריך לבדוק שלכל $u_1 \times \dots \times u_n$ בבסיס מתקיים $p_i(u_1 \times \dots \times u_n)$ פתוחה, ואכן $p_i(u_1 \times \dots \times u_n) = u_i$ והיא פתוחה בX_i.

משפט: יהיו $X_1,\dots,X_n$ מ״ט. Y עוד מ״ט. $f: Y \to X_1 \times \dots \times X_n$. אזי f רציפה אם״א $p_i \circ f$ רציפה לכל $i = 1,\dots,n$.

הוכחה: כוון ראשון: אם f רציפה אז $p_i \circ f$ רציפה (הרכבה של העתקות רציפות). כוון שני: נניח $p_i \circ f$ רציפה לכל $1 \le i \le n$. צ״ל f רציפה. מספיק להוכיח שתמונה הפוכה של קבוצת בסיס היא קבוצה פתוחה.

אך, ידוע כי: $f^{-1}(u_1 \times \dots \times u_n) = \{y \in Y : f(y) \in u_1 \times \dots \times u_n\} = \{y \in Y : p_1 \circ f \in u_1,\dots,p_n \circ f \in u_n\}$ וזה כמו להגיד בחיתוך הקבוצות, ולכן $f^{-1}(u_1 \times \dots \times u_n) = \{y \in Y : p_1 \circ f \in u_1\} \cap \dots \cap \{y \in Y : p_n \circ f \in u_n\} = \left((p_1 \circ f)^{-1}(u_1)\right) \cap \dots \cap \left((p_n^{-1} \circ f)^{-1}(u_n)\right)$ כל אחת מן הקבוצות הללו פתוחה, כי $p_i \circ f$ רציפה לכל i.

תרגילים:

1. $X_1,\dots,X_n,X_{n+1},\dots,X_m$
   $(X_1 \times \dots \times X_n) \times (X_{n+1} \times \dots \times X_m) \leftrightarrow (X_1 \times \dots \times X_m)$
2. יהיו $(X_1,T_1),\dots(X_n,T_n)$ מ״ט.
   נניח כי B_1 בסיס לT_1 וכן הלאה עד B_n בסיס לT_n. אזי, האוסף $\{V_1 \times \dots \times V_n: V_i \in B_i\}$ הוא בסיס לטופולוגית המכפלה.

3. הטופולוגיה הרגילה על $\mathbb{R}^n$ היא טופולוגית המכפלה $\mathbb{R}\times\ldots\times\mathbb{R}$

הגדרה : יהיו $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ אוסף קבוצות (ייתכן שI אינסופי). $\Pi_{\alpha\in I}X_\alpha \coloneqq \{\varphi: I\to\cup_{\alpha\in I}X_\alpha : \varphi(\alpha)\in X_\alpha, \forall\alpha\in I\}$

עבור $I=\mathbb{N}$ הטבעיים, מתקיים $\Pi_{n\in\mathbb{N}}X_n=\{\varphi:\mathbb{N}\to\cup_{n\in\mathbb{N}}X_n:\varphi(n)\in X_n\}$.

הגדרה : יהיו $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ אוסף של מרחבים טופולוגיים. נרצה לבחור טופולוגיה על $\Pi_{\alpha\in I}X_\alpha$ נעשה זאת בעזרת בחירה של בסיס. נגדיר $B=\left\{\Pi_{\alpha\in I}u_\alpha : \left(\begin{array}{c} u_\alpha\subseteq X_\alpha \text{ פתוחה ב} X_\alpha \\ \text{ו למספר סופי של אינדקסים מ} I \\ u_\alpha = X_\alpha \end{array}\right)\right\}$ ונראה שB מקיים את התנאי המספיק.

1. האם האיחוד הוא על המרחב? $\Pi_{\alpha\in I}X_\alpha\in B$
2. נתון $U=\Pi_{\alpha\in I}U_\alpha$, ו$U_\alpha\in X_\alpha$ פתוחות וקיימת $F\subseteq I$ סופית כך שלכל $\alpha\notin F$ מתקיים $U_\alpha=X_\alpha$.
נתון $V=\Pi_{\alpha\in I}V_\alpha$ כאשר $V_\alpha\subseteq X_\alpha$ פתוחות וקיימת $G\subseteq I$ סופית כך שלכל $\alpha\notin G$ מתקיים $V_\alpha=X_\alpha$.
בעצם, $U\cap V=\Pi_{\alpha\in I}U_\alpha\cap\Pi_{\alpha\in I}V_\alpha=\Pi_{\alpha\in I}U_\alpha\cap V_\alpha$ כאשר $U_\alpha\cap V_\alpha$ פתוחה בX_α. $F\cup G$ קבוצה סופית, ולכל $\alpha\notin F\cup G$ מתקיים $U_\alpha=X_\alpha$ וגם $V_\alpha=X_\alpha$ ולכן $U_\alpha\cap V_\alpha=X_\alpha$.

סימון : איבר ב$\Pi_{\alpha\in I}X_\alpha$ לפעמים נסמן כך $(a_\alpha)_{\alpha\in I}$. a_α הוא בעצם $\varphi(\alpha)$ אם זהו האיבר φ.

מהי ההטלה? מהו $p_\beta((a_\alpha)_{\alpha\in I})\coloneqq a_\beta$ וברישום הפונקציה $p_\beta(\varphi)=\varphi(\beta)$.

משפט : p_β רציפה ופתוחה.

הוכחה : (רציפות) תהי $u\subseteq X_\beta$ פתוחה. $p_\beta^{-1}(u)=\Pi_{\alpha\in I}V_\alpha$ כך ש$V_\beta=u$ ועבור $\alpha\neq\beta$ $V_\alpha=X_\alpha$. $F=\{\beta\}$.

(פתיחות) מספיק להראות שתמונה של קבוצת בסיס היא פתוחה. תהי $u=\Pi_{\alpha\in I}u_\alpha$ קבוצת בסיס. כלומר $u_\alpha\subseteq X_\alpha$ פתוחה בX_α ויש $\mathrm{F}\subseteq I$ סופית כך ש$u_\alpha=X_\alpha$ לכל $\alpha\notin F$. מתקיים $p_\beta(u)=p_\beta(\Pi_{\alpha\in I}u_\alpha)=u_\beta$ והיא פתוחה בX_β.

<u>הרצאה 9 (14.5.2014) :</u>

פיספסתי שתי דקות ראשונות כי משה נטל ידיים. פיכס.

משפט : יהא $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ אוסף של מ״ט. Y עוד מ״ט, $f:Y\to\Pi_{\alpha\in I}x_\alpha$ פונקציה. אזי f רציפה אם״א $p_\alpha\circ f$ רציפה לכל $\alpha\in I$.

הוכחה : כיוון ראשון : אם f רציפה אז $p_\alpha\circ f$ רציפה כי הראנו שp_α רציפה.

כיוון שני : נניח ש$p_\alpha\circ f$ רציפה לכל α. צ״ל שf רציפה. לשם כך מספיק להראות שתמונה הפוכה של קבוצת בסיס היא קבוצה פתוחה. כלומר, בהינתן מכפלה $\Pi_{\alpha\in I}u_\alpha$ כך ש$u_\alpha\subseteq x_\alpha$ פתוחה בx_α לכל α וכן יש $F\subseteq I$ סופית כל שלכל $\alpha\notin F$ מתקיים $u_\alpha=x_\alpha$. $f^{-1}(\Pi_{\alpha\in I}u_\alpha)$ פתוחה בY.

אפשר לרשום $f^{-1}(\Pi_{\alpha\in I}u_\alpha)=\{y\in Y: f(y)\in\Pi_{\alpha\in I}u_\alpha\}=\{y\in Y: p_\alpha\circ f(y)\in u_\alpha,\forall\alpha\}=$
$\cap_{\alpha\in I}\{y\in Y: p_\alpha\circ f(y)\in u_\alpha\}=\cap_{\alpha\in I}(p_\alpha\circ f)^{-1}(u_\alpha)=\cap_{\alpha\in F}(p_\alpha\circ f)^{-1}(u_\alpha)$ כי לכל $\alpha\notin F$ מתקיים $u_\alpha=x_\alpha$ ולכן $(p_\alpha\circ f)^{-1}(u_\alpha)=Y$. ו$\cap_{\alpha\in F}(p_\alpha\circ f)^{-1}(u_\alpha)$ הוא חיתוך של אוסף סופי של קבוצות פתוחות ולכן זוהי קבוצה פתוחה.

<u>הערה</u> : במובן מסוים הסיבה שבחרנו את הטופולוגיה על מכפלה באופן שבחרנו היא כדי שההוכחה הנ״ל תעבוד. דרך אחרת לאפיין את הטופולוגיה שבחרנו הוא שזוהי הטופולוגיה המינימלית שעבורה כל ההטלות רציפות.

כדי ש$p_\beta:\Pi_{\alpha\in I}X_\alpha\to X_\beta$ תהיה רציפה, צריך שכל תמונה הפוכה של $u_\alpha\subseteq X_\alpha$ תהיה פתוחה.

משפט : אם $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ אוסף מ״ט שכולם האוסדורף, אז $\Pi_{\alpha\in I}X_\alpha$ הוא האוסדורף.

הוכחה: יהי $(a_\alpha)_{\alpha\in I} \neq (b_\alpha)_{\alpha\in I}$ שתי נקודות שונות ב$\Pi_{\alpha\in I}X_\alpha$. לכן, קיים $\beta \in I$ כך ש$a_\beta \neq b_\beta$ וX_β הוא האוסדורף.
לכן יש $u, v \subseteq X_\beta$ פתוחות זרות כך ש$a_\beta \in u$, $b_\beta \in v$. נביט בקבוצות $\Pi_{\alpha\in I}u_\alpha, \Pi_{\alpha\in I}v_\alpha$ המוגדרות כך: $u = u_\beta,$ $u_\alpha = X_\alpha$ עבור $\alpha \neq \beta$, ובאופן דומה $v_\alpha = X_\alpha, \alpha \neq \beta$, $v_\beta = v$. אלו אכן סביבות זרות של $(a_\alpha)_{\alpha\in I}, (b_\alpha)_{\alpha\in I}$. בדקו למה הם פתוחות? למה זרות? ולמה הנקודות שם?

טענה: יהי $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ אוסף מ״ט, ותהי $(a_\alpha)_{\alpha\in I}$ נקודות ב$\Pi_{\alpha\in I}X_\alpha$.

נסמן $Y_\beta = \Pi_{\alpha\in I}A_\alpha \subseteq \Pi_{\alpha\in I}X_\alpha$ כאשר $A_\alpha = \begin{Bmatrix} \{a_\alpha\}, \alpha \neq \beta \\ X_\beta, \alpha = \beta \end{Bmatrix}$ אזי Y_α הומאומורפי לX_β.

הוכחה: נגדיר $f: X_\beta \to Y_\beta$, $g: X_\beta \to Y_\beta$ באופן הבא: $f(x) \coloneqq (x_\alpha)_{\alpha\in I}$ כאשר $x_\alpha = \begin{Bmatrix} a_\alpha, \alpha \neq \beta \\ x, \alpha = \beta \end{Bmatrix}$. כדי לבדוק שf רציפה, צריך לבדוק שכל רכיב רציף. ואכן, הרכיב הα עבור $\alpha \neq \beta$ הוא העתקה קבועה והרכיב הβ הוא העתקת הזהות. לכן f רציפה כהעתקה לתוך $\Pi_{\alpha\in I}X_\alpha$ ע״י צמצום הטווח היא רציפה כהעתקה לY_β.

$g = p_\beta|_{Y_\beta}$. g רציפה כצמצום של p_β שהיא רציפה ומתקיים $g \circ f = Id_{X_\beta}$ (בדוק!) ו$f \circ g = Id_{Y_\beta}$ (בדוק!).

טענה: גם הכוון השני למשפט האחרון מתקיים כלומר אם $\Pi_{\alpha\in I}X_\alpha$ האוסדורף (ו$X_\alpha \neq \phi$ לכל α) אז לכל $\alpha \in I$ מתקיים שX_α האוסדורף.

הוכחה: בהינתן $\beta \in I$ נראה שX_β האוסדורף. כיוון שהנחנו ש$X_\alpha \neq \phi$ לכל α אנו יכולים לבנות תת מרחב $Y_\beta \subseteq \Pi_{\alpha\in I}X_\alpha$ כפי שעשינו בטענה האחרונה. כיוון ש$\Pi_{\alpha\in I}X_\alpha$ האוסדורף, נקבל שY_β האוסדורף (תת מרחב של האוסדורף הוא האוסדורף) וכיוון ש$Y_\beta \cong X_\beta$ גם X_β האוסדורף.

משפט: יהי $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ אוסף של מ״ט. אם לכל α X_α הוא קשיר מסילתית אז $\Pi_{\alpha\in I}X_\alpha$ קשיר מסילתית.

הוכחה: יהי $a = (a_\alpha)_{\alpha\in I}, b = (b_\alpha)_{\alpha\in I}$. שתי נקודות ב$\Pi_{\alpha\in I}X_\alpha$. צריך למצוא מסילה מa לb. לכל α , X_α קשיר מסילית ולכן יש מסילה, כלומר פונקציה רציפה , $\gamma_\alpha: [0,1] \to X_\alpha$ כך ש$\gamma_\alpha(0) = a_\alpha, \gamma_\alpha(1) = b_\alpha$.

$(\gamma_\alpha)_{\alpha\in I}: [0,1] \to \Pi_{\alpha\in I}X_\alpha$ היא פונקציה המוגדרת כך: $(\gamma_\alpha)_{\alpha\in I}(t) \coloneqq \left(\gamma_\alpha(t)\right)_{\alpha\in I}$. היא רציפה כי כל רכיב רציף.

מתקיים $(\gamma_\alpha)_{\alpha\in I}(0) = (a_\alpha)_{\alpha\in I} = a$ ובאופן דומה $(\gamma_\alpha)_{\alpha\in I}(1) = b$.

גם הכוון השני נכון: אם $\Pi_{\alpha\in I}X_\alpha$ קשיר מסילתית, אז לכל $\beta \in I$, X_β הוא קשיר מסילתית. אכן $p_\beta: \Pi_{\alpha\in I}X_\alpha \to X_\beta$ היא רציפה ועל X_β. ותמונה רציפה של מ״ט קשיר מסילתית הוא קשיר מסילתית. נותר להוכיח קומפקטיות וקשירות.

משפט: יהי $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ אוסף של מ״ט. ולכל $\alpha \in I$ מתקיים כי X_α קשיר. אזי $\Pi_{\alpha\in I}X_\alpha$ קשיר.

הוכחה: שלב א: יהיו X, Y מ״ט קשירים אזי $X \times Y$ קשיר. נראה שלכל $(a,b),(c,d) \in X \times Y$ יש תת מרחב קשיר $A \subseteq X \times Y$ כך ש$(a,b),(c,d) \in A$ מכאן נקבל ש$X \times Y$ קשיר.

$X \times \{b\}$ קשיר כי הוא הומאו׳ לX. $\{c\} \times Y$ קשיר כי הוא הומאו׳ לY. $X \times \{b\} \cap \{c\} \times Y \neq \phi$ כי (c,b) נמצא שם.
לכן $A = X \times \{b\} \cup \{c\} \times Y$ קשיר ומתקיים $(a,b),(c,d) \in A$.

שלב ב: יהיו $X_1, \dots, X_n$ אוסף סופי של מרחבים טופולוגיים קשירים, אזי $X_1 \times \dots \times X_n$ גם קשיר.

הוכחה: אינדוקציה על שלב א׳.

שלב ג: יהי $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ אוסף כלשהו של מ״ט קשירים. תהי $(a_\alpha)_{\alpha\in I} \in \Pi_{\alpha\in I}X_\alpha$ ותהי $F \subseteq I$ תת קבוצה סופית.

נגדיר: $Y_F=\Pi_{\alpha\in I}A_\alpha$ כאשר $A_\alpha=\begin{cases}X_\alpha, \alpha\in F\\ \{a_\alpha\}, \alpha\notin F\end{cases}$. אנו נראה ש$Y_F\cong\Pi_{\alpha\in F}X_\alpha$ ולכן Y_F קשיר בזכות שלב 1.

הפונקציה היא $f:\Pi_{\alpha\in F}X_\alpha\to Y_F$ כאשר $f((X_\alpha)_{\alpha\in F})=(Y_\alpha)_{\alpha\in I}$ ו$Y_\alpha=\begin{cases}X_\alpha, \alpha\in F\to \text{הטלה}\\ a_\alpha, \alpha\notin F\to \text{קבוע}\end{cases}$. את g נגדיר $g:Y_F\to\Pi_{\alpha\in F}X_\alpha$ כאשר $g((Y_\alpha)_{\alpha\in I})=(X_\alpha)_{\alpha\in F}$ וכל אחד מהרכיבים הוא צמצום לY_F של הטלה.

אזי Y_F שהוגדר, קשיר.

שלב ד: נסמן $Y=\cup_{F\subseteq I,\text{ סופי }F}Y_F$ ($(a_\alpha)_{\alpha\in I}$ עדיין אותה נקודה קבועה). נשים לב ש$\cup_{F\subseteq I,\text{ סופי }F}Y_F\neq\phi$ כי $(a_\alpha)_{\alpha\in I}$ נמצא שם. לכן נותר לנו להוכיח את הלמה הבאה:

למה: יהי Z מ״ט. ויהי $A_\alpha\subseteq Z$ תתי מרחבים קשירים, כך ש$\cap_{\alpha\in I}A_\alpha\neq\phi$. נסמן $B=\cup_{\alpha\in I}A_\alpha$, אזי B קשיר.

הוכחה: יהיו $x,y\in B$ נראה שיש תת מרחב קשיר $C\subseteq B$ כך ש$x,y\in C$ ומכאן שB קשיר. אכן יש $\alpha\in I$ כך ש$x\in A_\alpha$ יש $\beta\in I$ כך ש$y\in A_\beta$. $A_\alpha\cap A_\beta\neq\phi$ ולכן $C=A_\alpha\cup A_\beta$ קשיר. מתקיים $x,y\in C$.

שלב ה: Y צפוף ב$\Pi_{\alpha\in I}X_\alpha$, ולכן $\Pi_{\alpha\in I}X_\alpha$ קשיר. בהנתן $u\subseteq\Pi_{\alpha\in I}X_\alpha$ פתוחה ולא ריקה, צ״ל ש$Y\cap u\neq\phi$.

קיימת קבוצת בסיס $\Pi_{\alpha\in I}u_\alpha\subseteq u$ לא ריקה (כי u איחוד של כאלה) ומספיק להראות $Y\cap\Pi_{\alpha\in I}u_\alpha\neq\phi$. למעשה, הראנו שתת מרחב הוא צפוף או״א הוא חיתוך כל קבוצת בסיס לא ריקה.

$\Pi_{\alpha\in I}u_\alpha$ קבוצת בסיס פרושו שלכל $\alpha\in I$, $u_\alpha\subseteq X_\alpha$ פתוחה, ויש $G\subseteq I$ סופית כך ש$u_\alpha=X_\alpha$ לכל $\alpha\notin G$.

$(\Pi_{\alpha\in I}u_\alpha)\cap\left(\cup_{G\subseteq I\text{ סופית }G}Y_G\right)=\cup_{\substack{G\subseteq I\\ \text{סופית } G}}(\Pi_{\alpha\in I}u_\alpha\cap Y_G)$ ומספיק להראות שאחד מהם לא ריק.

ואכן $(\Pi_{\alpha\in I}u_\alpha)\cap Y_G\neq\phi$.

תזכורת: $Y_G=\Pi_{\alpha\in I}A_\alpha$ כאשר $A_\alpha=\begin{cases}X_\alpha, \alpha\in G\\ \{a_\alpha\}, \alpha\notin G\end{cases}$. לכן $(\Pi_{\alpha\in I}u_\alpha)\cap Y_G=(\Pi_{\alpha\in I}u_\alpha)\cap(\Pi_{\alpha\in I}A_\alpha)=$ $\Pi_{\alpha\in I}(u_\alpha\cap A_\alpha)$ לכן נותר לבדוק שלכל α, $u_\alpha\cap A_\alpha\neq\phi$. וכדי ש$\Pi_{\alpha\in I}u_\alpha$ תהיה לא ריקה צריכים ש$u_\alpha\neq\phi$ לכל α. מתקבל $u_\alpha\cap A_\alpha=\begin{cases}u_\alpha\cap X_\alpha=u_\alpha\neq\phi, \alpha\in G\\ X_\alpha\cap\{a_\alpha\}=\{a_\alpha\}\neq\phi, \alpha\notin G\end{cases}$.

<u>הרצאה 10 (21.5.2014):</u>

טענה: יהי X מ״ט. B בסיס לטופולוגיה של X. אזי X קומפקטי או״א לכל כיסוי של X ע״י קבוצות בסיס יש תת כיסוי סופי.

הוכחה: קומפקטיות לתנאי הנ״ל זה ברור. בכיוון השני: יהי $\{u_\alpha\}_{\alpha\in I}$ כיסוי פתוח של X. צ״ל שיש לו תת כיסוי סופי. u_α פתוחה, לכן יש אוסף $\left\{v_\alpha^\beta\right\}_{\beta\in I_\alpha}$ של קבוצות בסיס כך ש$\cup_{\beta\in I_\alpha}v_\alpha^\beta=u_\alpha$ ולכן $X=\cup_\alpha\cup_{\beta\in I_\alpha}v_\alpha^\beta$. זהו כיסוי ע״י קבוצות בסיס. מהנה יש לו תת כיסוי סופי כלומר יש $v_{\alpha_1}^{\beta_1},v_{\alpha_2}^{\beta_2},\dots,v_{\alpha_n}^{\beta_n}$ כך ש$X=\cup_{1\le i\le n}v_{\alpha_i}^{\beta_i}$ ולכן $X=\cup_{1\le i\le n}u_{\alpha_i}$ כי $v_{\alpha_i}^{\beta_i}\subseteq u_{\alpha_i}$.

<u>הערות מכינות נוספות:</u>

$\{A_\alpha\times B_\alpha\}_{\alpha\in I}$ כאשר $A_\alpha\subseteq X, B_\alpha\subseteq Y$. נציין כי $\cup_{\alpha\in I}A_\alpha\times B_\alpha\neq\cup_{\alpha\in I}A_\alpha\times\cup_{\alpha\in I}B_\alpha$.

דוגמה נגדית שתמחיש זאת: $X=[0,1]=Y$, $A_2=B_2=\left[\frac{1}{2},1\right]$, $A_1=B_1=\left[0,\frac{1}{2}\right]$.

מתקיים כי: $(\cap_{\alpha\in I}A_\alpha)\times(\cup_{\alpha\in I}B_\alpha)\subseteq\cup_{\alpha\in I}A_\alpha\times B_\alpha$. למה זה מתקיים?

עבור $(x,y) \in (\cap_{\alpha\in I} A_\alpha) \times (\cup_{\alpha\in I} B_\alpha)$ קיים $\beta \in I$ כך ש$y \in B_\beta$ וכיוון שx נמצאת בכל A_α בפרט $x \in A_\beta$ ולכן $(x,y) \in A_\alpha \times B_\beta$ ולכן נמצא באיחוד.

אם $(A_\alpha \times B_\alpha)$ $\{a\} \times Y \subseteq \cup_{\alpha\in I}$ אז $\cup_{\alpha\in I} B_\alpha = Y$ כי בהינתן $y \in Y$ יש $\beta \in I$ כך ש$(a,y) \in A_\beta \times B_\beta$ ולכן $y \in B_\beta$ באיחוד.

משפט: אם X,Y מ״ט קומפקטיים, אז $X \times Y$ קומפקטיים.

הוכחה: מספיק להראות שלכל כיסוי של $X \times Y$ ע״י קבוצות בסיס $(u \times v)$ (כאשר $u \subseteq X$ פתוחה בX ו$v \subseteq Y$ פתוחה בY). יהי $\{u_\alpha \times v_\alpha\}_{\alpha\in I}$ כיסוי של $X \times Y$ ע״י קבוצות בסיס. נקבע $a \in X$ ונביט בתת המרחב $\{a\} \times Y$ הוא הומאומורפי לY ולכן קומפקטי. האוסף $\{u_\alpha \times v_\alpha\}$ מכסה את כל $X \times Y$ בפרט זהו כיסוי פתוח של $\{a\} \times Y$ ב$X \times Y$. יש $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ כך ש$u_{\alpha_i} \times v_{\alpha_i}$ $\{a\} \times Y \subseteq \cup_{1\le i\le n}$.

אם יש i כך ש$a \notin u_{\alpha_i}$ אז $u_{\alpha_i} \times v_{\alpha_i}$ זר ל$\{a\} \times Y$ ולכן ניתן להשמיט את $u_{\alpha_i} \times v_{\alpha_i}$ מהאיחוד הסופי וזה עדין יהיה תת כיסוי. אחרי השיטות אלה ניתן להניח ש$a \in u_{\alpha_i}$ לכל $1 \le i \le n$. כלומר $a \in \cap_{1\le i\le n} u_{\alpha_i}$. מצד שני, מההכרה האחרונה לפני המשפט $\cup_{1\le i\le n} v_{\alpha_i} = Y$. ז״א שנקבל $\left(\cap_{1\le i\le n} u_{\alpha_i}\right) \times \left(\cup_{1\le i\le n} v_{\alpha_i}\right) \subseteq \cup_{1\le i\le n} u_{\alpha_i} \times v_{\alpha_i}$. נסמן $\cap_{1\le i\le n} u_{\alpha_i} = u_a$ פתוחה כי היא חיתוך סופי של קבוצות פתוחות ו$\cup_{1\le i\le n} v_{\alpha_i} = Y$.

וכן $a \in u_a$ כלומר u_a סביבה של a. קיבלנו ש$u_a \times Y \subseteq \cup_{1\le i\le n} u_{\alpha_i} \times v_{\alpha_i}$.

לכל a ניקח u_a כזה. אזי (ל״ש) $\cup_{a\in X} u_a = X$, כלומר זהו כיסוי פתוח של X ,X קומפקטי לכן יש $a_1, \dots, a_m$ כך ש$\cup_{1\le i\le m} u_{a_i} = X$ ולכן $\cup_{1\le i\le m} u_{\alpha_i} \times Y = X \times Y$. אך כל אחת מm הקבוצות הללו מכוסה ע״י כיובי סופי של קבוצות מן הכיסוי למקור.

ביחד כל הקבוצות הללו הן אוסף סופי של k קבוצות מהכיסוי המקורי שאיחודם על $X \times Y$.

<u>מסקנה</u>: יהי $X_1, \dots, X_n$ אוסף סופי של X מ״ט קומפקטיים, אזי $X_1 \times \dots \times X_n$ קומפקטי.

הוכחה: אינדוקציה.

למעשה, זה נכון גם למכפלות אינסופיות.

משפט: (טיכונוף) אם $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ אוסף כלשהו של מ״ט קומפקטיים, אזי $\Pi_{\alpha\in I} X_\alpha$ קומפקטי.

לא נוכיח בכיתה, אלא רק לקבוצת תלמידים שתבקש לראות את ההוכחה.

משפט: יהי X מ״ט. $f, g: X \to \mathbb{R}$ רציפות, אזי $f+g$ רציפה. כאשר $f+g$ זו הפונקציה $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$.

הוכחה: f, g רציפות. לכן $(f,g): X \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ רציפה. מצד שני הפונקציה $S: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המוגדרת ע״י $S(a,b) = a+b$ היא רציפה. אפשר לרשום כי $f + g = S \circ (f,g)$. באותו אופן, $g \circ f$ רציפה, ובמקום S נביט בפונקציה $m: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המוגדרת ע״י $m(a,b) = a \cdot b$ ולכן $f \cdot g = m \circ (f,g)$. באותו אופן, עבור $f: X \to \mathbb{R}$ ו$g: X \to$ $\mathbb{R} - \{0\}$ רציפות אז $\frac{f}{g}$ רציפה עבור $d: \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \times \{0\}) \to \mathbb{R}$ הנתונה ע״י $d(a,b) = \frac{a}{b}$. ולכן $\frac{f}{g} = d \circ (f,g)$.

טענה: יהיו $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}, \{Y_\alpha\}_{\alpha\in I}$ (אותה קבוצת אינדקסים I). ונניח נתונות פונקציות רציפות $f_\alpha: X_\alpha \to Y_\alpha$. אזי נגדיר $\Pi_{\alpha\in I} f_\alpha: \Pi_{\alpha\in I} X_\alpha \to \Pi_{\alpha\in I} Y_\alpha$ כאשר $\Pi_{\alpha\in I} f_\alpha((a_\alpha)_{\alpha\in I}) := \left(f_\alpha(a_\alpha)\right)_{\alpha\in I}$ בהינתן $(a_\alpha)_{\alpha\in I} \in \Pi_{\alpha\in I} X_\alpha$ אזי $\Pi_{\alpha\in I} f_\alpha$ רציפה. נסמן את ההטלות של $\Pi_{\alpha\in I} X_\alpha$ בp_α ז״א $p_\alpha: \Pi_{\alpha\in I} X_\alpha \to X_\beta$ כאשר $p_\alpha((a_\alpha)_{\alpha\in I}) = a_\beta$. הרכיב הβ של $\Pi_{\alpha\in I} f_\alpha$ הוא $f_\beta \circ p_\beta$ וזו רציפה ולכן $\Pi_{\alpha\in I} f_\alpha$ רציפה.

בהינתן אוסף כלשהו $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ של מרחבים טופולוגיים, נגדיר את האיחוד הזר של האוסף באופן הבא:

שלב א׳: נחליף כל מ״ט X_α במרחב אחר שהומאומורפי לו, כך שכל המרחבים X_α זרים זה לזה. למשל, נחליף את X_α ב$X_\alpha \times \{a\}$. אכן מתקיים שאם $\alpha \neq \beta$ אז $X_\alpha \times \{a\}$ זר ל$X_\beta \times \{\beta\}$.

על $X_\alpha \times \{\alpha\}$ נגדיר את האופולוגיה של X_α ע״י ההתאמה הטבעית $x \leftrightarrow (x,\alpha)$.

שלב ב׳: החלפנו את X_α בX'_α כך שX'_α זרים זה לזה. נגדיר את $\bigsqcup_{\alpha\in I} X_\alpha$ באופן הבא: **שימו לב שבכיתה הוא כותב סימון אחר**

קבוצת הנקודות היא $\bigcup_{\alpha\in I} X'_\alpha$ תת קבוצה תחשב פתוחה אם היא איחוד של קבוצות פתוחות מהX'_αים. כלומר קבוצה שמוכלת ב$\bigcup_{\alpha\in I} X'_\alpha$ נחשבת פתוחה אם היא מהצורה $\bigcup_{\alpha\in I} u_\alpha$. כך ש $u_\alpha \subseteq X'_\alpha$ פתוחה בX'_α. זוהי אכן אופולוגיה.
הוכחה: תרגיל בית.

לכל $\beta \in I$ ישנה העתקה טבעית $i_\beta : X_\beta \to \bigsqcup_{\alpha\in I} X_\alpha$. כך ש $x \to x'_\beta$

טענה: ההעתקות i_β הן שיכונים על קבוצות פתוחות (בפרט הן רציפות). בלשון אחרת: i_β חח״ע, רציפה ופתוחה.

הוכחה: רציפות: מתקיים כי $i_\beta^{-1}(\bigcup_{\alpha\in I} u_\alpha) = u_\beta$.

פתיחות: $u \subseteq X_\beta$ ו$i(u) = u'$. היא פתוחה כי ניתן לחשוב עליה כאיחוד של u' עם ϕ עבור כל המרחבים האחרים.

משפט: יהי $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ אוסף מ״ט, וY עוד מ״ט. $f : \bigsqcup_{\alpha\in I} X_\alpha \to Y$ רציפה או״א $f \circ i_\alpha$ רציף לכל α.

הוכחה: כוון ראשון ברור: אם f רציפה, אז $f \circ i_\alpha$ רציפה לכל α כי הראנו שi_α רציפים.

כוון שני: נניח $f \circ i_\alpha$ רציף לכל α ותהי $v \subseteq Y$ פתוחה בY. אז נקבל ש$f|_{X_\alpha}$ רציף. הX'_α כיסוי של $\bigsqcup_{\alpha\in I} X_\alpha$ ע״י קבוצות פתוחות. ולכן f רציף.

הגדרה: יהי X מ״ט, ויהי ~ יחס שקילות על X. נסמן ב$\hat{X}$ את קבוצת מחלקות השקילות. ישנה העתקה טבעית $\rho : X \to \hat{X}$ שלוקחת את a למחלקת השקילות שלו שנסמנה תמיד [a]. כלומר $\rho(a) = [a]$.

על $\hat{X}$ נגדיר טופולוגיה באופן הבא: $u \subseteq X$ תחשב פתוחה אם $\rho^{-1}(u)$ פתוחה בX. צ״ל שזוהי טופולוגיה על $\hat{X}$ זו נקראת טופולוגית המנה, ו$\hat{X}$ עם טופולוגית המנה נקרא מרחב המנה של X המתקבל מיחס השקילות ~.

נראה שזוהי אכן טופולוגיה: נסמן בT את כל הקבוצות $u \subseteq \hat{X}$ המקיימות $\rho^{-1}(u)$ פתוחה בX ונראה שT טופולוגיה על $\hat{X}$.

א. $\rho^{-1}(\phi) = \phi$ וϕ פתוחה בX לכן $\phi \in T$.
$\rho^{-1}(\hat{X}) = X$ וX פתוחה בX לכן $\hat{X} \in T$.

ב. נניח $\{u_\alpha\}_{\alpha\in I}$ אוסף קבוצות בT. כלומר לכל $\alpha \in I$ $\rho^{-1}(u_\alpha)$ פתוחה בX. צ״ל ש$\bigcup_{\alpha\in I} u_\alpha \in T$ ואכן $\rho^{-1}(\bigcup_{\alpha\in I} u_\alpha) = \bigcup_{\alpha\in I} \rho^{-1}(u_\alpha)$ כאשר ידוע כי $\bigcup_{\alpha\in I} \rho^{-1}(u_\alpha)$ פתוחה בX ולכן האיחוד פתוח בX.

ג. נניח $u_1, \dots, u_n \in T$ כלומר $\rho^{-1}(u_i)$ עבור $1 \le i \le n$ פתוחה בX, אזי $\rho^{-1}(\bigcap_{1\le i\le n} u_i) = \bigcap_{1\le i\le n} \rho^{-1}(u_i)$ וגם כאן $\rho^{-1}(u_i)$ פתוחות בX ולכן החיתוך שהוא חיתוך של פתוחים בX.

משפט: ρ רציפה.

הוכחה: תהי $u \subseteq \hat{X}$ פתוחה ב$\hat{X}$ אזי מהגדרת טופולוגית המנה אכן $\rho^{-1}(u)$ פתוחה בX.

משפט: יהי Y מ״ט נוסף. $f : \hat{X} \to Y$ פונקציה. אזי f רציפה או״א $f \circ \rho$ רציפה.

הוכחה: אם f רציפה, אז ודאי $f \circ \rho$ רציפה כי הראנו שρ רציפה.

כוון שני: נניח $f \circ \rho$ רציפה. צ״ל f רציפה. תהי $u \subseteq Y$ פתוחה, צ״ל ש$f^{-1}(u)$ פתוחה ב$\hat{X}$. מהגדרת הטופולוגיה של $\hat{X}$, פרוש הדבר שצ״ל ש$\rho^{-1}\left(f^{-1}(u)\right)$ פתוחה בX. אבל: $\rho^{-1}\left(f^{-1}(u)\right) = (f \circ \rho)^{-1}(u)$ וזו פתוחה כי הנחנו ש$f \circ \rho$ רציפה. אם h מכבדת את יחס השקילות $a \sim b$ לכן $h(a) = h(b)$ אז h משרה $\hat{h}: \hat{X} \to Y$ כך ש $h = \hat{h} \circ \rho$ ולכן אם h רציפה אז $\hat{h}$ רציפה.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\rho"'] & Y \\ X/\sim \arrow[ur, "\hat{f}"'] & \end{tikzcd}$$

<u>הרצאה 11 (11.6.2014):</u>

תזכורת: f רציפה או״א $\hat{f}$ רציפה.

דוגמה: על $\mathbb{R}$ נגדיר יחס שקילות באופן הבא: $a - b \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow a \sim b$.

כיצד נבנה פונקציה רציפה על $\mathbb{R}/\sim$? ניקח פונקציה רציפה על $\mathbb{R}$ שמכבדת את יחס השקילות. כלומר, f שמקיימת $f(x+n) = f(x)$ לכל $n \in \mathbb{N}$ כך ש f רציפה, תשרה פונקציה רציפה $\hat{f}$ על $\mathbb{R}/\sim$. נבקש להראות קיום הומאומורפיזם.

$h: \mathbb{R}/\sim \to S/\sim = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ לשם כך נגדיר $f: \mathbb{R} \to S^1$ המכבדת את יחס השקילות ותהיה רציפה: $f(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$. קל לראות שf אכן מכבדת את יחס השקילות (ע״פ המחזוריות).

כמו כן, f רציפה. לכן f משרה פונקציה רציפה $\hat{f}: \mathbb{R}/\sim \to S^1$.

יותר מזה: $f(t) = f(s) \Leftrightarrow t - s \in \mathbb{Z}$ ולכן נקבל גם ש $\hat{f}$ חח״ע.

$[0,1] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\sim$ על כי $g \circ i$ על, וגם $[0,1]$ קומפקטי. לכן נקבל גם $\mathbb{R}/\sim$ קומפקטי. כמו כן, $S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^2$ האוסדורף, ולכן S^1 האוסדורף. $f: \mathbb{R}/\sim \to S^1$ מקומפקטי להאוסדורף+רציפה ולכן היא סגורה.

בסה״כ נקבל ש $\hat{f}$ הומאומורפיזם.

$[0,1]/0 \sim 1$ נראה שכם זה הומאומורפי לS^1. באותו אופן $g: [0,1] \to S^1$ ע״י $g(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$. קיבלנו ש-$[0,1]/\sim$ קומפקטי כי יש העתקה מ$[0,1]$ אליו שידוע שהוא קומפקטי.

הגדרה: $X \overset{\tau}{\rightrightarrows} M$, $\tau: X \to M$ תקרא העתקת מנה אם:

א. τ על.
ב. לכל $V \subseteq M$, V פתוחה או״א $\tau^{-1}(V)$ פתוחה. אם נגדיר על X יחס שקילות באופן הבא: $a \sim b$ או״א $\tau(a) = \tau(b)$ אז נוכל להשרות העתקה. ($\rho: X \to X/\sim$, $\tau: X \to M$, $\hat{\tau}: X/\sim \to M$)

משפט: אם $f: X \to Y$ העתקת מנה ו$g: Y \to Z$ העתקת מנה, אז $g \circ f: X \to Z$ העתקת מנה.

הוכחה:

א. g, f על, ולכן ההרכבה גם על.
ב. $r \subseteq Z$ פתוחה בZ או״א $g^{-1}(Z)$ פתוחה בY או״א $(f \circ g)^{-1}(Z) = f^{-1}\left(g^{-1}(Z)\right)$ פתוחה בX.

משפט: $\tau: X \to M$ העתקת מנה או״א:

א. τ על
ב. לכל $V \subseteq M$, V סגורה בM $\Leftrightarrow$ $\tau^{-1}(V)$ סגורה בX.

משפט:

א. אם τ על רציפה ופתוחה אז τ העתקת מנה
ב. אם τ על רציפה וסגורה אז τ העתקת מנה

הוכחה:

א. תהי $M \supseteq u$ פתוחה אזי $\tau^{-1}(u)$ פתוחה כי τ רציפה. ונניח כי $\tau^{-1}(u)$ פתוחה , אזי $u = \tau\left(\tau^{-1}(u)\right)$ פתוחה. וזה כי τ פתוחה.
ב. הוכחה זהה, רק עם המשלים.

מכאן ועד סוף השיעור ד״ר נוביק רק הדגים הדבקות ואת החומר הנלמד. אין לי איך לשרטט את זה ☹

<u>הרצאה 12 (18.6.2014)</u> :

תכונות הפרדה:

T_1, T_2 כבר הגדרנו.

הגדרה : מ״ט X ייקרא T_3 אם הוא מקיים :

א. הוא T_1
ב. לכל $S \subseteq X$, וכל $a \in X$, $a \notin S$, קיימת קבוצות פתוחות זרות U, V כך ש$S \subseteq U$, $a \in V$. (בלי א׳, המרחב הוא רגולרי)

הגדרה : מ״ט X ייקרא T_4 אם הוא מקיים :

א. הוא T_1
ב. לכל $Q, S \subseteq X$ סגורות זרות, קיימות U, V פתוחות זרות כך ש$S \subseteq V$, $Q \subseteq U$.

טענה : $T_4 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1$

הוכחה: $T_3 \Rightarrow T_2$: $a \neq b \in X$ אז $\{a\}$ סגורה ולכן יש U, V פתוחות זרות כך ש$b \in B$ וגם $\{a\} \subseteq U$ כלומר $a \in U, b \in V$.

$T_4 \Rightarrow T_3$: אם $S \subseteq X$, $a \notin S$ אז $\{a\}$ סגור. U, V זרות כך ש$\{a\} \subseteq U$, $S \subseteq V$ ואז $a \in U$.

משפט : מרחב מטרי הוא T_4.

הוכחה : יהיו S, Q שתי קבוצות סגורות זרות במרחב מטרי M. לכל $x \in Q$ מתקיים ש$x \in S^C$ פתוחה. לכן יש $\sigma_x > 0$ כך ש$B(x, \sigma_x) \subseteq S^C$ כלומר $B(x, \sigma_x)$ זר לS.

באותו אופן, לכל $y \in S$ יש σ_y כך ש$B(y, \sigma_y)$ זר לQ.

נסמן : $U = \cup_{x \in Q} B\left(x, \frac{\sigma_x}{2}\right)$ וגם $V = \cup_{y \in S} B\left(y, \frac{\sigma_y}{2}\right)$. טענה : $S \subseteq V, Q \subseteq U, U \cap V = \phi$.

נראה ש$U \cap V = \phi$. נניח שלא. יש $p \in U \cap V$ כלומר יש $x \in Q$ כך ש$p \in B\left(x, \frac{\sigma_x}{2}\right)$ ויש $y \in S$ כך ש$p \in B\left(y, \frac{\sigma_y}{2}\right)$. כלומר $d(p, x) < \frac{\sigma_x}{2}, d(p, y) < \frac{\sigma_y}{2}$ ולכן (ע״פ אי שוויון המשולש) $d(x, y) < \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$.

אבל אנחנו יודעים ש$d(x, y) \geq \sigma_x$ וגם $d(x, y) \geq \sigma_y$! וזו סתירה.

משפט : מ״ט האוסדורף קומפקטי X הוא T_4.

הוכחה : נוכיח בשני שלבים. שלב א׳ : X הוא T_3 ושלב ב׳ : X הוא T_4.

אנחנו כבר יודעים ש$T_2 \Rightarrow T_1$.

שלב א׳ : יהי $S \subseteq X$ סגורה, ו$a \notin S$. לכל $x \in S$ כיוון שX האוסדורף, יש קבוצת פתוחות זרות U_x, V_x כך ש$x \in U_x, a \in V_x$. האוסף $\{U_x\}_{x \in S}$ הוא פתוח של S בX. S קומפקטי ולכן יש $x_1, \dots, x_n \in S$ (אוסף סופי) כך ש$S \subseteq \cup_{1 \leq i \leq n} U_{x_i}$. מתקיים $a \in \cap_{1 \leq i \leq n} V_{x_i}$ שהיא פתוחה (כי החיתוך סופי). ונסיים אם נראה ש$\cap \left(\cup_{1 \leq i \leq n} U_{x_i}\right)$

$\left(\bigcap_{1\le i\le n} V_{x_i}\right)=\phi$. מתקיים כי $U_{x_i}\cap V_{x_i}=\phi$ כלומר $U_{x_i}\subseteq V_{x_i}^C$ ולכן $\bigcup_{1\le i\le n} U_{x_i}\subseteq U_{1\le i\le n}V_{x_i}^C=\left(\bigcap_{1\le i\le n} V_{x_i}\right)^C$ כלומר $\left(\bigcup_{1\le i\le n} U_{x_i}\right)\cap\left(\bigcap_{1\le i\le n} V_{x_i}\right)=\phi$.

שלב ב׳: יהי $S\subseteq X$ סגורה, $Q\subseteq X$ סגורה, $Q\cap S=\phi$. לכל $x\in S$ מתקיים ש$x\notin Q$ כיוון שX T_3, יש קבוצת פתוחות זרות U_x, V_x כך ש$x\in U_x, Q\in V_x$. האוסף $\{U_x\}_{x\in S}$ הוא פתוח של S בX. S קומפקטי ולכן יש $x_1,\dots,x_n\in S$ (אוסף סופי) כך ש$S\subseteq\bigcup_{1\le i\le n} U_{x_i}$. מתקיים $Q\subseteq\bigcap_{1\le i\le n} V_{x_i}$ שהיא פתוחה (כי החיתוך סופי). ונסיים אם נראה ש$\left(\bigcup_{1\le i\le n} U_{x_i}\right)\cap\left(\bigcap_{1\le i\le n} V_{x_i}\right)=\phi$. מתקיים כי $U_{x_i}\cap V_{x_i}=\phi$ כלומר $U_{x_i}\subseteq V_{x_i}^C$ ולכן $\bigcup_{1\le i\le n} U_{x_i}\subseteq U_{1\le i\le n}V_{x_i}^C=\left(\bigcap_{1\le i\le n} V_{x_i}\right)^C$ כלומר $\left(\bigcup_{1\le i\le n} U_{x_i}\right)\cap\left(\bigcap_{1\le i\le n} V_{x_i}\right)=\phi$. (שלב א׳ וב׳ מאוד דומים, חוץ מכמה מילים ☺)

בזה סיימנו את החומר של הקורס.