פתרון תרגיל 7

1. א) לכל שדה F, הגרעין של האפימורפיזם det (=דטרמיננטה) $\det : GL_n(F) \to F^*$ הוא $SL_n(F)$. לכן, לפי משפט האיזומורפיזם הראשון נקבל ש- $GL_n(F)/SL_n(F)$ איזומורפי ל- F^*. בפרט, $GL_n(Z_5)/SL_n(Z_5)$ איזומורפי ל – $(Z_5)^*$ ולכן הסדר שלו = 4.

ב) נניח שקיים. אז לפי משפט האיזומורפיזם הראשון $|\ker(f)| / 20 = |\ker(f)|/|Z_{20}| = |S_3| = 6$ ז"א –

$|\ker(f)| = 20/6$ – לא יכול להיות.

2. א) נסמן ב- i את הסדר של התמונה. אזי i צריך לחלק גם את 12 וגם את 15 ולכן i=1,3.

ב) אם היוצר של המקור G לא היה עובד ליוצר של H, אז ההומומורפיזם המתקבל לא היה על – כי התמונה, כת"ח ציקלית (כל ת"ח של חבורה ציקלית היא ציקלית), הייתה מוכלת ממש ב- H.

ג) ראינו ש- i=1 או i=3. אם i=1 אז $Im(f) = \{1_H\}$ ולכן ההומומורפיזם הינו $f(g) = 1_H$.

אם i=3 אז Im(f) היא ת"ח מסדר 3 של H. יש רק ת"ח אחת כזו (כי H ציקלית) ולכן מספיק למצוא את מספר האפימורפיזמים מ-G ל- Im(f), או את מספר האפימורפיזמים מ-G ל-Z_3. לפי ב), אפימורפיזם מעביר יוצר ליוצר. מספר היוצרים של Z_3 הוא $\phi(3) = 2$. לכן, אם $a \in G$ הוא יוצר, אז f(a) הוא או היוצר הראשון או היוצר השני. ז"א – אם i=3 אז יש שתי אפשרויות לבניית ההומומורפיזם f.

לסיכום – יש שלושה הומומורפיזמים $f: G \to H$.

3. א)צ"ל:

$$f(s*t) = f(s)*f(t)$$

הוכחה: $$f(s*t) = g^{s*t} = g^s * g^t = f(s)*f(t)$$

ב) 6Z

ג) על פי משפט האיזו' הראשון: התמונה איזומופרית ל- Z/6Z ולכן סדרה הוא 6.

4. . א) ההוכחה שזו תת-חבורה היא קלה (למשל: הרכבה של שתי פונקציות חח"ע ועל השומרות על 4 היא גם פונ' חח"ע ועל השומרת על 4).

זו לא תת-חבורה נורמלית: תוצאת ההצמדה של איבר בה לא בהכרח תתקבל בתת-חבורה זו.

ב) ניתן להוכיח ש- $aH = bH = \{(1\ 2),(1\ 3),(2\ 3)\}$ (הראו זאת מפורשות).

ג) לא נכון.

נראה כי $A = \{ a \in S_n : a^2 = Id \}$ לא סגורה להרכבה.

נקח $\sigma = (12), \tau = (13)$ אלו תמורות בכל חבורה S_n עבור $n \geq 3$

ומתקיים כי $\sigma, \tau \in A$ אבל $\sigma\tau$ אינו ב-*A*:

וזו $\sigma\tau = (132)$ תמורה מסדר 3.

לכן *A* אינה תת-חבורה לכל $n \geq 3$.

5. א) ראשית – נשים לב ש- n>3. נבחר ראשית שני מספרים a,b מתוך n המספרים וניצור מהם חילוף. יש $\binom{n}{2}=\binom{n}{2}(2-1)!$ אפשרויות לעשות כך. לאחר מכן נבחר עוד שני מספרים c,d מתוך n-2 המספרים שנותרו וניצור מהם חילוף – ויש $\binom{n-2}{2}$ אפשרויות לעשות כך.

אבל (a b)(c d) = (c d)(a b) ולכן מספר התמורות מהצורה המבוקשת הינו $\frac{1}{2}\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}$.

ב.כמה איברים מקיימים את המשוואה $\mathrm{x}^3 = \mathrm{Id}$ ב- S_{10} ?

נסתכל על כל תמורה בהצגתה כמכפלת מחזורים זרים-

זה מתקיים כאשר $\underline{x = Id}$ (ויש תמורה אחת כזו!)

או <u>כאשר *x* מחזור באורך *3*</u>-ויש $\binom{10}{3}2$ תמורות כאלו:

$\binom{10}{3}$ אפשרויות לבחירת שלשת מספרים כזו

$\binom{10}{3}2$ אפשרויות לסדר שלשות אלו בסדר מחזורי שונה:

נימוק:ששת האפשרויות לסידורי שלושה מספרים מצטמצמות

לשתי אפשרויות בגלל שחשוב רק הסדר המחזורי ביניהם:

$$(mnk) = (nkm) = (kmn)$$

$$(nmk) = (mkn) = (knm) \ .$$

או <u>כאשר x מבוטא כמכפלת שני מחזורים זרים באורך 3</u>-

ולזה יש $\frac{1}{2!}\binom{10}{3}\binom{7}{3}2^2$ תמורות כאלו ב-S_{10}.

הסבר

($\binom{10}{3}$ אפשרויות לשלשת המספרים הנבחרת למחזור הזר האחד

לאחר בחירתו נשאר לבחור שלשה מתוך 7 המספרים הנותרים

למחזור השני ולזה יש $\binom{7}{3}$ שלשות אפשריות.

יש להכפיל ב-2 כל-אחת מהמספרים הנ"ל כי לכל בחירת מחזור יש 2 אפשרויות לסדרו .(לפי ההסבר הקודם)

סה"כ-$\binom{10}{3}\binom{7}{3}2^2$ אפשרויות

יש לחלק מספר זה ב-*!2* בגלל שאין חשיבות לסדר בחירת התמורות(אין חשיבות לסדר כתיבתן)

סה"כ מספר תמורות שניתן לבטאן כמכפלת שני מחזורים זרים באורך 3

הוא-$\binom{10}{3}\binom{7}{3}2^2\frac{1}{2!}=\binom{10}{3}\binom{7}{3}2$

או כאשר *x* <u>מבוטא כמכפלת שלושה מחזורים זרים באורך 3</u>-

בדומה לשיקולים קודמים יש $\binom{10}{3}\binom{7}{3}\binom{4}{3}2^3\frac{1}{3!}$ תמורות כאלו ב-S_{10}.

ולכן בסה"כ יש $1+2\binom{10}{3}+\binom{10}{3}\binom{7}{3}2+\frac{1}{3!}\binom{10}{3}\binom{7}{3}\binom{4}{3}2^3$ תמורות המקיימות

$x^3=\mathrm{Id}$ ב-S_{10}.

6. שתי תמורות צמודות אם ורק אם יש להן את אותו מבנה מחזורים, קל לחשב במקרה זה שמספר המחלקות הוא 11.

7. א) V מוכלת ב- A_4 והיא תת-חבורה (הראו זאת!). היא תת-חבורה נורמלית כי היא מכילה את כל התמורות מהצורה (_ _)(_ _).

ב) לפי לגרנז': $|A_4/V| = |A_4|/|V| = 12/4 = 3$. כל תת-חבורה מסדר ראשוני p איזומורפית ל- Z_p ולכן A_4/V איזומורפית ל- Z_3, ולכן ציקלית.