

הרצאה 12

מספר Lebesgue

הגדרה: נניח α, β כל אחד אוסף תתי קבוצות של קבוצה X . אומרים ש β עידון של α אם

$$\forall B \in \beta \exists A \in \alpha: B \subseteq A$$

נסמן: $\beta < \alpha$.

דוגמה טריוויאלית: אם $\beta \subseteq \alpha$ אז $\beta < \alpha$.

דוגמה: $\forall 0 < r_1 < r_2 \quad \{B_{r_1}(x) : x \in X\} < \{B_{r_2}(x) : x \in X\}$

הגדרה: נניח (X, d) מ"מ, α כיסוי של X . אומרים ש α הוא δ -אחיד

$$\{B_\delta(x) | x \in X\} < \alpha$$

אם מתקיים

אומרים כיסוי אחיד (*uniform covering*) אם הוא δ -אחיד עבור $\delta > 0$ מסוים.

הגדרה: אומרים שהמספר $\delta > 0$ הוא **מספר לבג** (*Lebesgue*) של כיסוי α אם כל תת קבוצה

B ב X בעלת קוטר קטן מ δ מוכל באחד מהאיברים של α .

$$(\text{diam } B < \delta \Rightarrow \{B\} < \alpha \quad \text{ז"א})$$

הערות:

(1) אם $0 < \delta < \delta_1 < \delta$ גם מספר לבג.

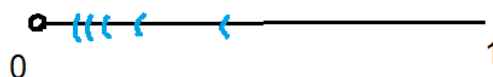
(2) עבור $\alpha = \{B_\delta(x) | x \in X\}$, מספר לבג = δ .

(3) **דוגמה:** כיסוי פתוח ללא מספר Lebesgue.

$$A_n := \left(\frac{1}{n+1}, 1\right] \quad X = (0,1] \notin \text{Comp}$$

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots \quad \alpha := \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

כיסוי פתוח של $(0,1]$. אבל אין מספר לבג עבור α .



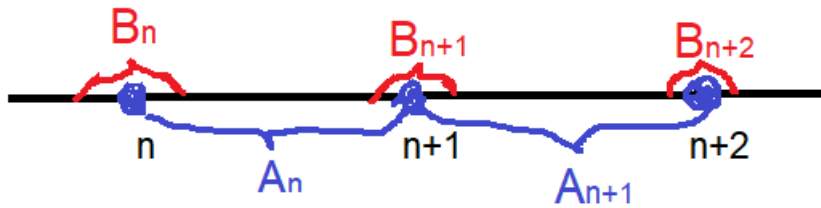
אם נניח בשלילה שכן אז קיים $\delta > 0$ מספר לבג ל α ,

$$A := B_{\frac{2\delta}{5}}(\frac{1}{5}\delta) = (0, \frac{3}{5}\delta)$$

$$\text{diam}(A) = \frac{3}{5}\delta < \delta$$

אבל A לא מוכל באף איבר של α .

תרגיל: במרחב \mathbb{R} לכיסוי פתוח $\Omega = \{A_n = (n, n+1), B_n = (n - \frac{1}{|n+1|}, n + \frac{1}{|n+1|}) : n \in \mathbb{Z}\}$ אין מספר לבג.



משפט: (מספר Lebesgue) נניח (X, d) מרחב מטרי קומפקטי. אז לכל כיסוי פתוח α יש מספר לבג.

הוכחה: נניח בשלילה שקיים כיסוי פתוח α ללא מספר לבג.

אז לכל $n \in \mathbb{N}$ קיימת תת קבוצה A_n כך ש

$$\text{diam}(A_n) < \frac{1}{n} \text{ אבל } A_n \text{ לא מוכל באף איבר של } \alpha.$$

לכל $n \in \mathbb{N}$ נבחר נקודה אחת $a_n \in A_n$.

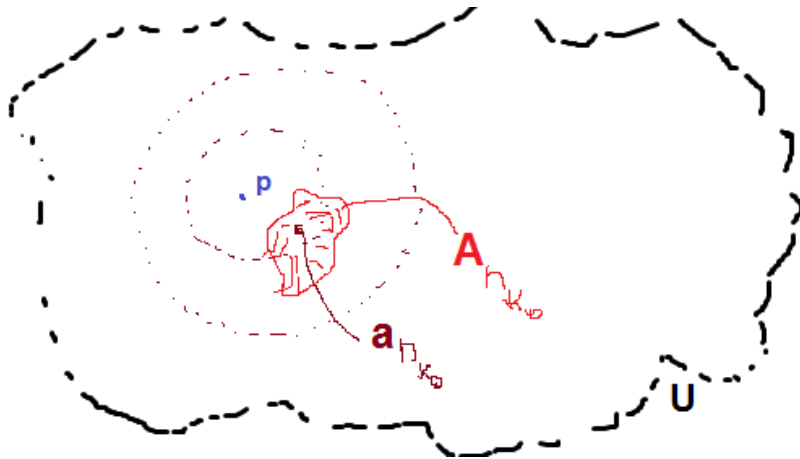
נתון ש $X \in \text{SComp}$ הוא מטריזבילי לכן גם $X \in \text{SComp}$.

לכן קיימת תת סדרה מתכנסת $\{a_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ של הסדרה $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. תהי $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = p$.

קיים $U \in \alpha$ כך ש $p \in U$ (כי α כיסוי)

קיים $\varepsilon > 0$ כך ש $B_\varepsilon(p) \subseteq U$ (כי U פתוח)

קיים $k_0 \in \mathbb{N}$ כך ש $\text{diam}(A_{n_{k_0}}) < \frac{\varepsilon}{2}$ (התכנסות והבניה) $d(p, a_{n_{k_0}}) < \frac{\varepsilon}{2}$



$$\forall x \in A_{n_{k_0}} \quad d(p, x) \leq d(p, a_{n_{k_0}}) + d(a_{n_{k_0}}, x) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}$$

נקבל $A_{n_{k_0}} \subseteq B_{\epsilon}(p)$. אז גם $A_{n_{k_0}} \subseteq B_{\epsilon}(p) \subseteq U \in \alpha$, סתירה עם הבנייה של $A_{n_{k_0}}$!

☺

תוצאה: אם מרחב מטרי הוא קומפקטי אז כל כיסוי פתוח שלו אחיד.

הסבר: נניח α כיסוי פתוח. קיים מספר לבג $\delta > 0$. אז $\{B_{\frac{\delta}{3}}(x) : x \in X\} < \alpha$

משפט: נניח $(X, d), (Y, \rho)$ מרחבים מטריים $f : X \rightarrow Y$ פונקציה רציפה. אם X קומפקטי אז $f : X \rightarrow Y$ רציפה במידה שווה.

הוכחה: נניח $\epsilon > 0$. ש"ל שקיים $\delta > 0$ כך שמתקיים :

$$d(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow \rho(f(x_1), f(x_2)) \leq 2\epsilon$$

נגדיר $\alpha := \{f^{-1}(B_{\epsilon}(y)) : y \in Y\}$. אז α כיסוי פתוח של X (רציפות).

קיים מספר לבג $\delta > 0$ עבור α (קומפקטיות של X ומשפט על מספר לבג).

נניח $d(x_1, x_2) < \delta$. אז $diam\{x_1, x_2\} < \delta$. לכן קיים $y \in Y$ כך ש

$$\{x_1, x_2\} \subseteq f^{-1}(B_{\epsilon}(y))$$

$$\{f(x_1), f(x_2)\} \subseteq ff^{-1}(B_{\epsilon}(y)) \subseteq B_{\epsilon}(y) \quad \text{אז}$$

$$\rho(f(x_1), f(x_2)) \leq diam(B_{\epsilon}(y)) \leq 2\epsilon \quad \text{לכן}$$

☺

מידע: ראו על "מרחבין אחידים" [uniform spaces](#)

הגדרה: מ"ט X הוא קומפקטי מקומית אם לכל נקודה יש סביבה קומפקטית. שקול: לכל נקודה יש סביבה שהסגור שלה קומפקטי. נסמן: $X \in LComp$. דוגמאות: מרחב דיסקרטי, \mathbb{R}^n , כל תת קבוצה פתוחה במרחב קומפקטי T_2 ...

תרגיל: $\mathbb{Q} \notin LComp$.

הערה: "קומפקטיות מקומית" לא נשמרת ע"י מכפלה אינסופית (סופית – כן!). ראו תרגיל הבא

תרגיל: $\mathbb{R}^n \in LComp$ אבל $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \notin LComp$.

הסבר: כל סביבה $V \in N(x)$ של כל נקודה $x = (x_1, \dots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ מכילה תיבה בסיסית $U := U_1 \times U_2 \times \dots \times U_m \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots$. לכן הטלה $\mathbb{R} = p_{m+1}(U) = p_{m+1}(V)$ עם תמונה רציפה (שהיא לא קומפקטית) ...

הגדרה: פונקציה $f: X \rightarrow Y$ נקראת קומפקטיפיקציה (compactification) של X אם f שיכון טופולוגי צפוף ומתקיים $Y \in Comp \cap T_2$.

דוגמאות:

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \quad f(n) = \frac{1}{n}$$

$$i: (-1,1) \rightarrow [-1,1]$$

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow B_1[0] \quad f(v) = \frac{v}{1+|v|}$$

תרגיל* (יהיה בתירגול) -- קומפקטיפיקציה חד-נקודתית (Alexandroff)

נניח (X, τ) קומפקטי מקומית לא קומפקטי והאוסדורפי. תהי $p \notin X$ ("נקודת האינסוף"). בקבוצה $X^* = X \cup \{p\}$ נגדיר $\tau^* := \tau \cup \{X^* \setminus K : K \text{ is compact}\}$.

הוכיחו:

$$1. (X^*, \tau^*) \in Comp \cap T_2.$$

2. פונקציית ההכלה $i: X \rightarrow X^*$ מגדירה שיכון טופולוגי צפוף.

דוגמאות:

- $X = \mathbb{R}^n$ או $X^* = S_n$ (הטלה סטראוגרפית)
- $X = (-\infty, 1) \cup (5, 7)$ או $X^* = 8$
- $X = \mathbb{N}$ או $X^* = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$

תרגיל: לתאר קומפקטיפיקציה חד-נקודתית לכל מרחב דיסקרטי (אינסופי).

משפט: $LComp \cap T_2 \subset T_{3.5}$

הוכחה: נניח $X \in LComp \cap T_2$. אם X קומפקטי אז הוא T_4 כי הוכחנו ש $Comp \cap T_2 \subset T_4$. לכן גם $X \in T_{3.5}$. בה"כ $X \notin Comp$.

אז קיימת קומפקטיפיקציה $i: X \rightarrow X^* \in Comp \cap T_2$. ברור $X^* \in T_4$.

(כי $Comp \cap T_2 \subset T_4$). מצד שני $T_4 \subset T_{3.5}$ (כי $T_4 = T_4^{finc}$ לפי משפט Urysohn). לכן $X^* \in T_{3.5}$. כעת נשתמש בעובדה ש $T_{3.5}$ תכונה תורשתית. לכן גם $X \in T_{3.5}$.

☺

תזכורת: $T_0, T_1, T_2, T_3, T_{3.5}$ תכונות תורשתיות.

משפט: $Metriz \subset T_4$

הוכחה: $(X, \tau) \in Metriz \Rightarrow \exists d: \tau = top(d)$

מ"ל:

א. $X \in T_1$

ב. לכל A, B סגורות יש הפרדה פונקציונלית (הפרדה פונקציונלית גוררת הפרדה סביבתית)

א) ברור $Metriz \subset T_2$.

ב) נגדיר $f: X \rightarrow [0, 1]$ ע"י: $f(x) = \frac{f_A(x)}{f_A(x) + f_B(x)}$

כאשר $f_A(x) = d(x, A), f_B(x) = d(x, B)$

• $0 \leq f(x) \leq 1$

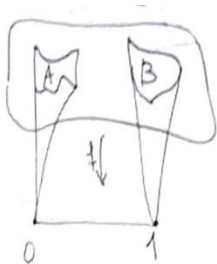
• מוגדר היטב: המכנה $\neq 0$ לכל x כי $f_A(x) \geq 0, f_B(x) \geq 0$

– לכן המכנה = 0 אם ורק אם –

$$\begin{cases} f_A(x) = 0 \\ f_B(x) = 0 \end{cases}$$

⇕

5



$$\begin{cases} d(x, A) = 0 \\ d(x, B) = 0 \end{cases}$$

\Updownarrow

$$\begin{cases} x \in \bar{A} \stackrel{\text{נתון סגור}}{=} A \\ x \in \bar{B} \stackrel{\text{נתון סגור}}{=} B \end{cases}$$

לכן $A \cap B = \emptyset$ (נתון). סתירה!

• נשים לב כי –

$$\frac{f_1}{f_2} = f \in C(X, [0,1])$$

f רציפה. זה קורה כי $f_1, f_2 \in C(X)$ וכן $f_2 \neq 0$ תמיד.

$$\forall a \in A: f(a) = \frac{0}{0} = 0 \quad \bullet$$

$$\forall b \in B: \frac{d(b,A)}{d(b,A)+0} = f(b) = 1 \quad \bullet$$

מצאנו הפרדה פונקציונלית!

☺

מידע: קיימים $X \in T_{3\frac{1}{2}}/T_4$, למשל $X := \mathbb{N}^{\mathbb{R}}$

Urysohn's Small Lemma (USL)

נניח $X \in T_4$ אז

(*) לכל סביבה פתוחה O של קבוצה סגורה A קיימת סביבה פתוחה U של A כך ש

$$A \subset U \subset \bar{U} \subset O$$

הסבר: $X \in T_4$ לכן עבור קבוצות סגורות זרות $A, B := X \setminus O$ קיימות סביבות פתוחות זרות

$$U \in N(A) \cap \tau, V \in N(B) \cap \tau$$

$$A \subset U \subset \bar{U} \subset X \setminus V \subset X \setminus B = O \quad \text{אז נקבל}$$

הערה: בעצם (*) שקול לתנאי ב של אקסיומת T_4

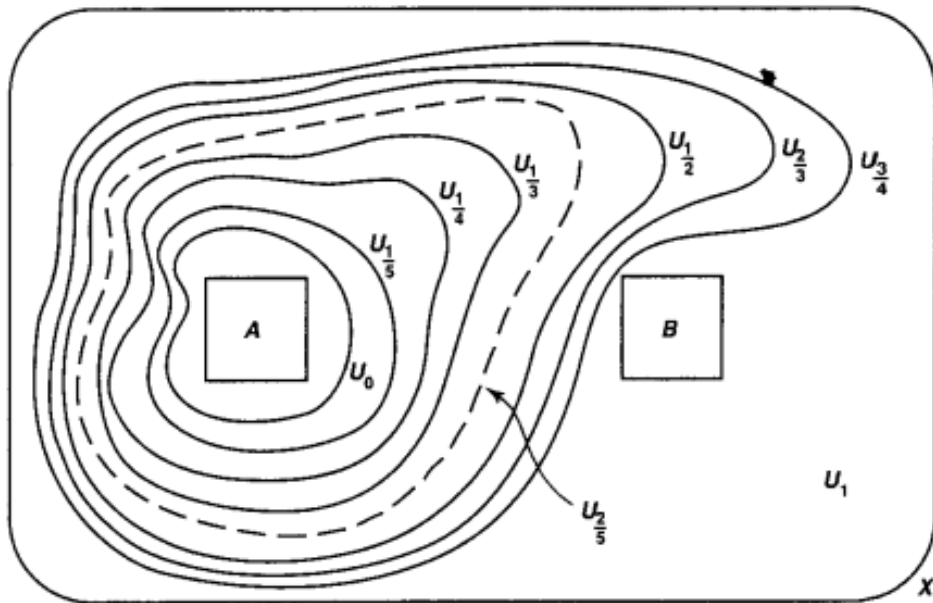
משפט (למה של Urysohn): $T_4 = T_4^{func}$

נניח $X \in T_4$. אז לכל קבוצות סגורות זרות A, B יש הפרדה פונקציונלית במובן Urysohn

$$(f : X \rightarrow [0,1] \quad f(A) = 0, f(B) = 1)$$

הוכחה: רעיון להוכחה – "Onion Argument"

בהנחה שיש פונקציה כזאת אז יש אוסף $\{U_t : t \in [0,1]\}$ סביבות פתוחות של A כך ש
 $0 < s < t < 1 \Rightarrow \overline{U_s} \subseteq U_t$ (ניקח למשל: $U_t := f^{-1}[0,t)$. שימו לב: $(\overline{[0,s)} \subseteq [0,t)$)



בהוכחה הבאה עוברים תהליך הפוך – מבניית מאוסף דומה לבניית פונקציה.

תחילת התהליך: נגדיר $U_1 = X$. בגלל (USL) עבור $A \subset B^c$ קיימת קבוצה פתוחה $U_{\frac{1}{2}}$

$$A \subset U_{\frac{1}{2}} \subset \overline{U_{\frac{1}{2}}} \subset X \setminus B \quad \text{כך ש}$$

שוב בגלל (USL) קיימות קבוצות פתוחות $U_{\frac{1}{4}}, U_{\frac{3}{4}}$ כך ש

$$A \subset U_{\frac{1}{4}} \subset \overline{U_{\frac{1}{4}}} \subset U_{\frac{1}{2}} \subset \overline{U_{\frac{1}{2}}} \subset U_{\frac{3}{4}} \subset \overline{U_{\frac{3}{4}}} \subset X \setminus B$$

בשלב הבא נמצא סביבות פתוחות עם אינדקסים $\frac{1}{8}, \frac{2}{8} = \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{4}{8} = \frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \frac{6}{8} = \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{8}{8} = 1$

כאשר סביבות עם האינדקסים $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}, \frac{4}{8} = \frac{1}{2}, \frac{6}{8} = \frac{3}{4}, \frac{8}{8} = 1$ כבר הגדרנו!

נמשיך כך באינדוקציה. אז נקבל אוסף קבוצות פתוחות

$$0 < s < t < 1 \Rightarrow \overline{U_s} \subseteq U_t \quad \{U_t : t \in D\}$$

שימו לב קבוצת רציונליים דיאדיים $D := \{\frac{m}{2^n}, m, n \in \mathbb{N}, m \leq 2^n\}$ **צפופה** ב $[0,1]$.

$$f(x) := \inf\{t \in D : x \in U_t\} \quad \text{נגדיר פונקציה}$$

$$0 \leq f(x) \leq 1 \quad f(a) = 0 \quad \forall a \in A \quad f(b) = 1 \quad \forall b \in B \quad \bullet$$

$$\forall t \in D \quad A \subseteq U_t \subseteq X \setminus B \subseteq X = U_1 \quad 0 \in \overline{D} = [0,1] \quad \text{כי}$$

$$f : X \rightarrow [0,1] \quad \text{רציפה} \quad \text{(נדלג על הבדיקה)} \quad \bullet$$

לפי תכונת פרא-בסיס (ב) $[0,1]$ מ"ל $f^{-1}(a,1)$, $f^{-1}[0,a)$ פתוחות ב X .
 א. לפי ההגדרה $f^{-1}[0,a) = \{x \in X : f(x) < a\}$.
 קבוצה D צפופה ב $[0,1]$. לכן נקבל ש $f^{-1}[0,a) = \bigcup_{t < a} U_t$ והיא פתוחה לפי (t_3) .

ב. ש"ל $X \setminus f^{-1}(a,1)$ סגור.

קודם נעיר $X \setminus f^{-1}(a,1) = \{x \in X : f(x) \leq a\}$.

עכשיו מ"ל $\{x \in X : f(x) \leq a\} = \bigcap_{a < t} \overline{U}_t$ (ואז חיתוך קבוצות סגורות שימוש ב (t_3^c))
 (\subseteq)

נניח $y \in \{x \in X : f(x) \leq a\}$. נבחר דיאדי $s \in D$ כך ש $a < s < 1$ (צפיפות D !)
 אז לכל $a < t < s$ נקבל $\overline{U}_t \subseteq U_s$.

מצד שני בגלל $f(y) \leq a < t$ מתקיים $y \in U_t \subseteq \overline{U}_t$. לכן $y \in \bigcap_{a < t} \overline{U}_t$.
 (\supseteq)

נניח $y \in \bigcap_{a < t} \overline{U}_t$. נבחר ε כך ש $0 < \varepsilon < 1 - a$.

בגלל הצפיפות של D נבחר:

$$a < t < a + \varepsilon < 1 \quad t \in D$$

וגם $s \in D$ כך ש $t < s < a + \varepsilon$.

ברור שאז $\overline{U}_t \subseteq U_s$. לכן $y \in U_s$. מכאן $f(y) \leq s < a + \varepsilon$.

קיבלנו $\forall 0 < \varepsilon < 1 - a \quad f(y) < a + \varepsilon$.

ז"א $f(y) \leq a$.

☺

הערה: (Tietze-Urysohn extension thm)

נניח $X \in T_1$. אז התנאים הבאים שקולים:

1. $X \in T_4$.

2. לכל תת קבוצה סגורה $A \subset X$ ולכל פונקציה רציפה $f : A \rightarrow [0,1]$ קיימת הרחבה רציפה

$$F : X \rightarrow [0,1]$$

נוכיח רק $(1) \rightarrow (2)$:

נניח C, B קבוצות סגורות זרות לא ריקות. נגדיר קבוצה $A := C \cup B$. אז היא סגורה. ונגדיר

$$f : A \rightarrow [0,1] \quad f(A) = 0, f(B) = 1$$

פונקציה רציפה. אז היא רציפה

(שימו לב: $A := C \cup B$ פירווק טופולוגי).

לפי (2) קיימת הרחבה רציפה $F: X \rightarrow [0,1]$.

אז לפי הבנייה היא מפרידה פונקציונלית C, B .

תרגיל: (Square-filling curves)

בעזרת משפט ההרחבה הוכיחו שקיימת פונקציה רציפה על $F: [0,1] \rightarrow [0,1]^2$.

הסבר:

קיים הומיאומורפיזם $h: C \rightarrow C^2$ וקיימת פונקציה רציפה ועל $\varphi: C \rightarrow [0,1]$

מידע: כל מרחב קומפקטי מטריזבילי הוא תמונה רציפה של קבוצת קנטור.

למשל: $(x_i \in \{0,2\}) \quad f\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{3^i}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{2} \cdot \frac{1}{2^i}$ $f: C \rightarrow [0,1]$ (מדוע היא לא חח"ע?)

אז יש גם פונקציה רציפה ועל $f = (\varphi \times \varphi) \circ h: C \rightarrow [0,1] \times [0,1]$

כעת נשתמש במשפט ההרחבה ונקבל פונקציה רציפה ועל $F: [0,1] \rightarrow [0,1]^2$.



הגדרה: נניח $S = \{f_i: X \rightarrow Y_i\}_{i \in I}$ אוסף של פונקציות. אומרים ש S :

א. מפריד נקודות אם לכל $x_1 \neq x_2$ ב X קיים $f_{i_0}: X \rightarrow Y_{i_0}$ ב S כך ש $f_{i_0}(x_1) \neq f_{i_0}(x_2)$

ב. מפריד נקודות וקבוצות סגורות אם לכל $x \in X$ וקבוצה סגורה K ב X כך ש $x \notin K$

קיים $f_{i_0}: X \rightarrow Y_{i_0}$ ב S כך ש $f_{i_0}(x) \notin \overline{f_{i_0}(K)}$

משפט (על פונקציות האלכסון):

1. נניח $S = \{f_i: X \rightarrow Y_i\}_{i \in I}$ אוסף של פונקציות רציפות ונתבונן בפונקציות האלכסון

$$f = \Delta_{i \in I} f_i: X \rightarrow Y = \left(\prod_{i \in I} Y_i, \tau_{\Pi}\right) \quad f(x) = (f_i(x))_{i \in I}$$

א. אם S מפריד נקודות אז רציפה חח"ע.

ב. אם S מפריד נקודות וקבוצות סגורות, אז $X \in T_1$ שיוון טופולוגי.

הוכחה: א. לפי משפט על האלכסון רציפה ומתקיים $\forall i \in I \quad f_i = p_i \circ f$

לכן אם $f_{i_0}(x_1) \neq f_{i_0}(x_2)$ אז $f(x_1) = (f_i(x_1))_{i \in I} \neq (f_i(x_2))_{i \in I} = f(x_2)$

ב. $X \in T_1$ לכן לפי שלב (א) האוסף S מפריד נקודות ופונקציה אלכסון היא חח"ע.

מ"ל שפונקציה (חח"ע+על+רציפה) "מצומצמת בטווח" $f : X \rightarrow f(X)$ סגורה.

מ"ל $f(K) = f(X) \cap \overline{f(K)}$ לכל K סגור ב X .

מ"ל $f(K) \supseteq f(X) \cap \overline{f(K)}$ (הכלה \subseteq ברורה).

נניח $y \in f(X) \cap \overline{f(K)}$. צ"ל $y \in f(K)$.

נקבל $\exists x \in X \quad y = f(x) \in \overline{f(K)}$.

אז בגלל השוויונים $\forall i \in I \quad f_i = p_i \circ f$ רציפות ההטלות נקבל

$$\forall i \in I \quad f_i(x) = p_i(f(x)) \in p_i \overline{f(K)} \subset \overline{p_i f(K)} = \overline{f_i(K)}$$

זאת אומרת S לא מפריד נקודה x וקבוצה סגורה K . אז בהכרח $x \in K$.

זה מוכיח $y = f(x) \in f(K)$.

☺

משפט: נניח X מ"ט. התנאים הבאים שקולים:

1. X קומפקטי והאוסדורפי (ז"א $X \in Comp \cap T_2$).

2. X הומיאומורפי לתת קבוצה סגורה של קובית Tychonoff $[0,1]^S$.

הוכחה: $2 \Leftarrow 1$

$[0,1]^S \in Comp$ (משפט Tychonoff). תת קבוצה סגורה גם קומפקטית. T_2 תכונה כפולית

ותורשתית. לכן $X \in Comp \cap T_2$.

$2 \Leftarrow 1$

נניח $X \in Comp \cap T_2$. מ"ל שקיים שיכון טופולוגי $f : X \rightarrow [0,1]^S$ עבור S מסוים.

הוכחנו ש $Comp \cap T_2 \subset T_4$. נשתמש במשפט Urysohn $T_4 = T_4^{func}$.

לכל זוג של נקודות שונות $a, b \in X$ נבחר בפונקציה רציפה

$$f_{a,b} : X \rightarrow [0,1], f(a) = 0, f(b) = 1$$

אוסף של כל הפונקציות שנבחרו $S := \{f_s = f_{a,b} \mid a \neq b\}$ (ז"א $s = (a, b), a \neq b$)

משרה פונקציה האלכסון $f : X \rightarrow [0,1]^S \quad f(x) = (f_s(x))_{s \in S}$

הפונקציה היא רציפה (הוכחנו ...) "מפרידה נקודות" ז"א היא חח"ע.
לפי **משפט השיכון** נקבל שהפונקציה היא מגדירה שיכון טופולוגי (על קבוצה סגורה).

