מרצה: מיכאל מגרל megereli@math.biu.ac.il אתר המרצה אתר הקורס wiki סילבוס

הרצאה 5

תזכורת: במ"ט תמיד $A \subseteq scl(\mathrm{A}) \subseteq cl(\mathrm{A})$.

הוכחה: הכלה ראשונה נובעת מזה שסדרות קבועות תמיד מתכנסות.
נניח $z \in scl(A)$. אז קיימת סדרה $a_n \in A$ שמתכנסת (במרחב X) ל z.
לכל סביבה $U \in N(z)$ כמעט כל האיברים של a_n נמצאים ב U. אז ברור $U \cap A \neq \varnothing$ לכן $z \in cl(A)$. זה מוכיח $scl(\mathrm{A}) \subseteq cl(\mathrm{A})$.
☺

שאלה: א. למצוא מ"ט (X,τ) שבו לא תמיד $scl(\mathrm{A}) = cl(\mathrm{A})$
(ואז (X,τ) לא מטריזבילי).
ב. אותה שאלה אבל בתנאי נוסף ש $(X,\tau) \in T_2$.

דוגמה א: $(\mathbb{R},\tau_{coc})$ $\tau_{coc} := \{Y^c \subseteq \mathbb{R} : |Y| \le \aleph_0\} \cup \{\varnothing\}$

$[0,1] = scl([0,1]) \neq cl([0,1]) = \mathbb{R}$.

דוגמה ב: נגדיר $X := \mathbb{R} \cup \{p\}, p \notin$

$\tau := \{O \subseteq X \,|\, p \in O \Rightarrow |O\hat{}c| \le \aleph_0\}$

ז"א אם $p \in O$, אז המשלים O^c הוא בן מנייה. נשים לב ש - $\forall x \neq p: \{x\} \in \tau$.

לבדוק:
- $(X,\tau) \in TOP$. לבדוק גם T_2.

- τ לא דיסקרטית (נק' p לא מבודדת).
- תת מרחב טופולוגי $Y := (\mathbb{R}, \tau_Y)$ של מ"ט הנ"ל
  הוא $\mathbb{R}$ עם טופולוגיה <u>דיסקרטית</u>. ז"א $\tau_Y = P(\mathbb{R}) = \tau_{discr}$.
- לבדוק $\mathbb{R} = scl(\mathbb{R}) \neq \mathrm{cl}(\mathbb{R}) = \mathrm{X}$
- אם סדרה a_n מתכנסת ב (X, τ) אז היא קבועה לבסוף
- $id : (X, \tau) \to (X, \tau_{discr})$ שומרת על התכנסות סדרות אבל לא רציפה !
  מסקנה: עיקרון *Heine* כאן לא מתקיים!
- $(X, \tau) \notin Metriz$.

<u>תכונות (int, cl), ∂, סביבות:</u> במ"ט (X, τ)

1) $\forall\, a \in X : X \in N(a)$ (<u>רמז:</u> t_1).

2) חיתוך **סופי** של סביבות (פתוחות) גם סביבה (פתוחה). <u>רמז:</u> t_2.

3) $V \in N(a) \Leftarrow \begin{cases} U \in N(a) \\ V \supseteq U \end{cases}$

4) $\boxed{\underbrace{int(A)}_{A^\circ} \subseteq A \subseteq \underbrace{cl(A)}_{\bar{A}}}$.

5) לכל $A_1 \subseteq A_2$ מתקיים:

$int(A_1) \subseteq int(A_2)$

$cl(A_1) \subseteq cl(A_2)$

$scl(A_1) \subseteq scl(A_2)$

6) קריטריון לפתיחות : $\boxed{A \text{ פתוחה} \Leftrightarrow int(A) = A}$

<u>רמז:</u> t_3. $A = \bigcup_{a \in A} O_a$

7) קריטריון לסגירות: $\boxed{A \text{ סגורה} \Leftrightarrow cl(A) = A}$

8) $A^{\circ\circ} = A^\circ$. (ז"א: $\mathrm{int}(\mathrm{int}(A)) = \mathrm{int}(A)$)

9) $A^\circ \in \tau$ (ז"א A° תמיד פתוחה).

10) $\boxed{(A_1 \cap A_2)^\circ = A_1^\circ \cap A_2^\circ}$ (לכל מספר **סופי**).

11) A° = קב' פתוחה הכי גדולה בין תת קבוצות פתוחות של A, כלומר –

$$\bigcup\{O \subseteq X | O \subseteq A, O \in \tau\}$$

12) $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$ (ז"א $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}(A)) = \mathrm{cl}(A)$)

13) $\bar{A}$ תמיד קב' סגורה.

14) $\bar{A}$ = קב' סגורה הכי קטנה בין קבוצות סגורות שמכילות את A. כלומר

$$\bigcap\{B \subseteq X \big| B \supseteq A, X \text{ סגורה ב } B\}$$

15) (הפרשים) נניח O פתוחה, B סגורה. אזי:

א. $O \setminus B$ פתוחה. ב. $B \setminus O$ סגורה.

<u>הסבר:</u> $O \setminus B = O \cap B^c$ $B \setminus O = B \cap O^c$.

16) **<u>משפט הקשר</u>** בין הסגור והפנים. תמיד מתקיים:

א. $\boxed{cl(A^c) = \left(int(A)\right)^c}$

שקול: ב. $int(A^c) = \left(cl(A)\right)^c$

<u>הוכחה:</u> א $\Leftrightarrow$ ב כי נוכל להציב $A \coloneqq A^c$. <u>מ"ל (א)</u>

$$x \in \left(int(A)\right)^c$$

$$\Updownarrow$$

$$x \notin int(A)$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall\, U \in N(x) : U \nsubseteq A$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall\, U \in N(x) : \; U \cap A^c \neq \emptyset$$

$$\Updownarrow$$

$x \in cl(A^c)$

☺

17) $\overline{A_1 \cup A_2} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2}$ (לכל מס' **סופי**).

<u>**הגדרה:**</u> **השפה של A**: $\partial(A) := \overline{A} \setminus A^\circ$

18) $\partial(A) = \bar{A} \cap \overline{A^c}$.

<u>הסבר:</u> $\partial(A) = \overline{A} \setminus A^\circ = \bar{A} \cap (A^\circ)^c \underbrace{=}_{16.1} \bar{A} \cap \overline{A^c}$

19) $\partial(A)$ תמיד סגורה!

<u>הסבר:</u> כחיתוך של קבוצות סגורות (ראו 18).

20) $\boxed{\partial(A) = \partial(A^c)}$

21) (במ"מ (X,d)) $\partial(A) = \{x \in X | d(x,A) = 0, d(x,A^c) = 0\}$

<u>הסבר:</u> תכונות הסגור במ"מ...

22) $cl(A) = A \cup \partial(A)$ $\quad \operatorname{int}(A) = A \setminus \partial(A)$

<u>**הגדרה:**</u> תת קבוצה A במ"ט (X,τ) נקראת ***צפופה*** אם $cl(A) = X$.

שקול: (קריטריון צפיפות) לכל קבוצה פתוחה לא ריקה O מתקיים $A \cap O \neq \varnothing$
.

תרגיל: אם A צפופה ב X אז לכל קבוצה פתוחה O מתקיים:
$cl(O) = cl(O \cap A)$.

<u>**הגדרה:**</u> מ"ט (X,τ) נקרא **ספרבילי** אם קיימת ת"ק צפופה <u>ובת מניה</u>.

סימון: $(X,\tau) \in \mathrm{Sep}$.

הערה: תמיד $cl(X) = X$. לכן תמיד X צפופה ב X. לכן מרחב טופולוגי בת מניה תמיד ספרבילי.

הערה: (משפט Weierstrass)

$(C[a,b],top(d_{\max}))=cl(P_{\mathbb{Q}}[a,b])=$ {פולינומים רציונליים}

לכן $(C[a,b],top(d_{\max}))\in Sep$.

תרגילים מומלצים:

- $\mathbb{R}^n\in \mathrm{Sep}$
- הוכיחו: $l_2\in \mathrm{Sep}$ (רמז: $A:=\{(q_1,q_2,\cdots)\in l_2 : q_k\in\mathbb{Q},\exists n\ \forall i>n\ \ q_i=0\}$)
- $(X,\tau_{discr})\in \mathrm{Sep}$ אם ורק אם X בת מניה.
- חיתוך של 2 (או מספר סופי) קבוצות פתוחות צפופות גם צפופה.
- יהי (X,d) מ"מ. תת קבוצה צפופה ב $(X,\mathrm{top(d)})$ אם ורק אם היא ε-צפופה לכל $\varepsilon>0$.

  הגדרה: A ε-צפופה ב (X,d) אם לכל $x\in X$ קיים $a\in A$ כך ש $d(x,a)<\varepsilon$.

  שקול $\bigcup_{a\in A}B(a,\varepsilon)=X$.

* הוכיחו: $l_\infty\notin \mathrm{Sep}$

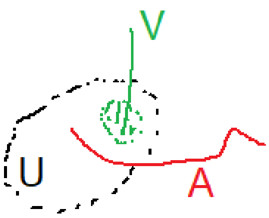
<u>הגדרה</u>: תת קבוצה A במ"ט X נקראת <u>דלילה</u> (nowhere dense) אם $\mathrm{int}(cl(A))=\varnothing$.

למשל: קו ישיר דליל במישור. מישור דליל במרחב תלת ממדי.

נקודון במרחב מטרי דליל אם ורק אם היא לא מבודדת.

<u>משפט</u>: (**קריטריונים לקבוצות דלילות**) התנאים הבאים שקולים:

א. A דלילה במ"ט X (ז"א $\mathrm{int}(cl(A))=\varnothing$).
ב. $X\setminus cl(A)$ צפופה ב X.
ג. $cl(A)$ לא מכיל אף תת קבוצה פתוחה לא ריקה.
ד. לכל קבוצה פתוחה לא ריקה U קיימת קבוצה פתוחה V כך ש: $\varnothing\neq V\subseteq U\quad V\cap A=\varnothing$.



הוכחה:

א $\Leftarrow$ ב

$\operatorname{int}(cl(A)) = \varnothing$

$X \setminus \operatorname{int}(cl(A)) = X$

מכאן, לפי **משפט הקשר**, נקבל

$cl(X \setminus cl(A)) = X$

ב $\Leftarrow$ ג

נניח בשלילה שקיימת ק"פ $\varnothing \neq O \subseteq cl(A)$. אז $O \cap (X \setminus cl(A)) = \varnothing$.

מכאן $X \setminus cl(A)$ לא צפופה ב X (ראו קריטריון צפיפות).

ג $\Leftarrow$ ד

נניח בשלילה שקיימת ק"פ $U \neq \varnothing$ כך שלכל ת"ק פתוחה $\varnothing \neq V \subseteq U$ מתקיים

$V \cap A \neq \varnothing$

אז כל נקודה של U היא נקודת סגור של A. זאת אומרת $U \subseteq cl(A)$. סתירה לתנאי ג.

ד $\Leftarrow$ א

נניח בשלילה שלא. אז $U := \operatorname{int}(cl(A)) \neq \varnothing$. לכל ת"ק **פתוחה** $\varnothing \neq V \subseteq U$ מתקיים $\varnothing \neq V \subseteq \operatorname{int}(cl(A)) \subseteq cl(A)$. אבל אז לפי הגדרת סגור $V \cap A \neq \varnothing$

סתירה לתנאי ד.

☺

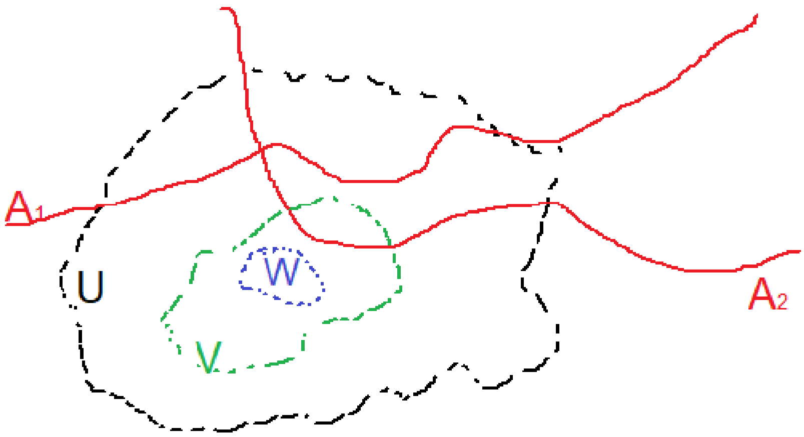
תרגילים מומלצים:

1. A דלילה ב X אם"ם $cl(A)$ דלילה ב X.
2. אם A דלילה ב X אז A^c צפופה ב X.
3. איחוד בן מניה של קבוצות דלילות לא תמיד קבוצה דלילה.

<u>**טענה**</u>: איחוד **סופי** של קבוצות דלילות גם קבוצה דלילה.

הוכחה:

נניח A_1, A_2 דלילות ב X. צ"ל $A_1 \cup A_2$ דלילה ב X.



נשתמש בסעיף ד של המשפט.

נניח U פתוחה לא ריקה. A_1 דלילה ב X. לכן קיימת ק"פ V כך ש

$V \cap A_1 = \varnothing \quad \varnothing \neq V \subseteq U$.

A_2 דלילה ב X. לכן קיימת ק"פ W כך ש

$W \cap A_2 = \varnothing \quad \varnothing \neq W \subseteq V$.

אז $W \cap (A_1 \cup A_2) = \varnothing \quad \varnothing \neq W \subseteq U$.

☺

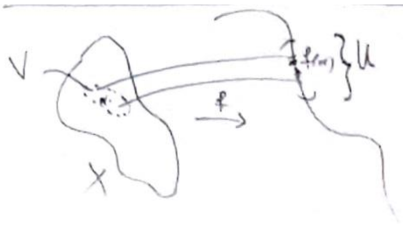
__**הגדרה**__: מ"ט נקראת *מקטגוריה ראשונה* אם הוא איחוד בן מניה של קבוצות דלילות.

אחרת, הוא נקרא *מקטגוריה שניה*.

__הערה__: **משפט Baire** אומר שכל מרחב מטרי **שלם** הוא מקטגוריה שניה (ראו למשל "טופולוגיה קבוצתית" של האוניברסיטה הפתוחה, כרך א, עמוד 89).

רציפות פונקציות

<u>תזכורת: (רציפות בנקודה):</u> נניח שנתונה פו' בין מ"ט $(Y,\sigma) \xrightarrow{f} (X,\tau)$. f
נקראת **רציפה בנקודה** $X \ni a$
אם: $\boxed{\forall\, U \in N\big(f(a)\big)\ \exists\, V \in N(a) \colon f(V) \subseteq U}$



<u>שקול:</u> $\forall\, U \in N\big(f(a)\big) \colon f^{-1}(U) \in N(a)$

(מילולית: מקור של סביבה (ל $f(a)$) גם סביבה (ל a)).

<u>משפט (קריטריון לרציפות):</u> נניח $(Y,\sigma) \xrightarrow{f} (X,\tau)$ פו' בין מ"ט. התנאים שקולים:

1) f רציפה (בכל נקודה).

2) מקור של כל קב' פתוחה גם פתוחה.

3) מקור של כל קב' סגורה גם סגור.

4) $\forall\, A \subseteq X \colon z \in cl(A) \Rightarrow f(z) \in cl\big(f(A)\big)$.

5) $f\big(cl(A)\big) \subseteq cl\big(f(A)\big)$.

<u>הוכחה:</u>

<u>$(1) \Leftarrow (2)$:</u>

נניח $O \in \sigma$. צ"ל $f^{-1}(O) \in \tau$.

לכל $a \in f^{-1}(O)$ צ"ל ש $a \in int\big(f^{-1}(O)\big)$

(קריטריון לפתיחות: A פתוחה $\Leftrightarrow int(A) = A$).

$a \in f^{-1}(O)$

$$\Downarrow$$

$$f(a) \in O \in \sigma$$

$$\Downarrow$$

$$O \in N\big(f(a)\big)$$

הגדרת הרציפות בנקודה a

$$\Downarrow$$

$$a \in f^{-1}(O) \in N(a)$$

הגדרת נקודות פנים

$$\Downarrow$$

$$a \in int\big(f^{-1}(O)\big)$$

$(2) \Leftrightarrow (3)$: כי $\big(f^{-1}(A)\big)^c = f^{-1}(A^c)$.

$(4) \Leftrightarrow (5)$: ברור.

נוכיח $(3) \Rightarrow (5)$:

נניח $A \subseteq X$. צ"ל $f\big(cl(A)\big) \subseteq cl\big(f(A)\big)$.

$$A \subseteq f^{-1}\big(f(A)\big) \subseteq f^{-1}\Big(cl\big(f(A)\big)\Big)$$

המעבר האחרון נובע מזה ש $f(A) \subseteq cl\big(f(A)\big)$. נפעיל "$cl$" בשני האגפים:

$$cl(A) \subseteq cl\bigg(f^{-1}\Big(cl\big(f(A)\big)\Big)\bigg) \overset{(*)}{=} f^{-1}\Big(cl\big(f(A)\big)\Big)$$

(בהפעלת cl יש "מונוטוניות" $A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow cl(A_1) \subseteq cl(A_2)$).

<u>הסבר $(*)$:</u>

א) $cl(B)$ סגור.

ב) נתון (3).

ג) B סגור $\Leftrightarrow cl(B) = B$.

כעת, נפעיל f על שני האגפים לקבל:

$$f\big(cl(A)\big) \subseteq ff^{-1}\left(cl\big(f(A)\big)\right) \subseteq cl\big(f(A)\big)$$

נוכיח $(4) \Leftarrow (1)$:

נניח בשלילה ש - (1) לא נכון. ז"א, f לא רציפה בנקודה מסוימת $a \in X$.

ז"א, קיימת <u>סביבה פתוחה</u> U של $f(a)$ כך ש - $f^{-1}(U) \notin N(a)$.

שקול: $a \notin int\big(f^{-1}(U)\big)$

שקול: $cl\left(f^{-1}(U)^c\right) \underbrace{=}_{\text{תכונת הקשר}} \left(int\big(f^{-1}(U)\big)\right)^c \ni a$

בגלל נתון (4) נקבל:

$$f(a) \in cl\big(f(f^{-1}(U)^c)\big) = cl\big(f(f^{-1}(U^c))\big) \subseteq cl(U^c) = U^c$$

(המעבר האחרון נובע כי U פתוחה ולכן $Y \setminus U$ סגורה, וסגור של סגורה שווה לעצמה).

קיבלנו: $f(a) \notin U$ בסתירה לנתון!

☺

<u>משפט</u>: $(\text{Heine-}\frac{1}{2})$ כל f רציפה שומרת על התכנסות סדרות.

<u>הוכחה:</u>

$$f(x_n) \xrightarrow{\sigma} f(a) \quad \underbrace{\Leftarrow}_{\text{צריך להוכיח}} \quad x_n \xrightarrow{\tau} a$$

שקול להוכיח – $\forall\, U \in N\big(f(a)\big)\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0: f(x_n) \in U$

עבור $U \in N\big(f(a)\big)$ המקור $f^{-1}(U) \in N(a)$ (בגלל רציפות f בנקודה a).

נתון $\lim_{n\to\infty} x_n = a$

וגם ידוע $f^{-1}(U) \in N(a)$ ולכן קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך ש – $x_n \in f^{-1}(U)$

מכאן $\forall n \geq n_0: f(x_n) \in U$

☺

הערה חשובה: במ"מ ההיפך גם נכון (עיקרון $Heine$). אבל זה לא תמיד נכון במ"ט ! (אפילו אם מתקיימת תכונת האוסדורף).

ראו דוגמה ב מתחילת ההרצאה

$id:(X,\tau)\to(X,\tau_{discr})$ שומרת על התכנסות סדרות אבל לא רציפה.

תכונות נוספות של פונקציות רציפות:

- כל $(X,\tau_{discr})\xrightarrow{f}(Y,\sigma)$ תמיד רציפה.
- כל $(X,\tau)\xrightarrow{f}(Y,\tau_{tr})$ תמיד רציפה.
- הרכבה $f_2\circ f_1:X_1\to X_3$ של פונקציות רציפות $f_1:X_1\to X_2$

  $f_2:X_2\to X_3$ היא גם רציפה.

- הוכיחו שבכל במ"ט (X,τ) ולכל $f_1,f_2\in C(X)$ מתקיים :

א) $f_1+f_2\in C(X)$.

ב) $f_1\cdot f_2\in C(X)$.

ג) $\frac{f_1}{f_2}\in C(X)$ בתנאי ש - $f_2(x)\neq 0$ לכל $x\in X$.

הערה: נוח לבדוק "דרך סביבות".

משפט (תורשתיות של רציפות): $f:X\to Y$ רציפה, $X\supseteq A\neq\emptyset$, $B\subseteq Y$ כך ש $f(A)\subseteq B$. אזי פונקציה מושרית $\boxed{\begin{matrix}A\xrightarrow{f_0}B\\ a\longmapsto f(a)\end{matrix}}$ גם רציפה.

הוכחה:

בודקים לפי קריטריון רציפות מספר 2

(ז"א מקור של קבוצה פתוחה הוא גם פתוח).

צ"ל שלכל קבוצה פתוחה $O\cap B$ (כאשר $O\in\tau_Y$) ב – B מתקיים $f_0^{-1}(O\cap B)$ פתוחה ב- A.

$$f_0^{-1}(O \cap B) = \{x \in A | f(x) \in O \cap B\} = f^{-1}(O \cap B) \cap A$$
$$= f^{-1}(O) \cap f^{-1}(B) \cap A \underbrace{=}_{f(A) \subseteq B} \underbrace{f^{-1}(O)}_{\substack{X\text{פתוחה ב-} \\ f \text{ בגלל רציפות}}} \cap A$$

לכן $f^{-1}(O) \cap A$ קבוצה פתוחה ב A (תת מרחב).

☺