טופולוגיה

ד״ר טל נוביק

מרחב מטרי הוא קבוצה M ופונקציה $d: M \times M \to [0,\infty)$ כך ש :

1. $d(x,y)=0$ או״א x=y (וברור ש $d(x,y) \geq 0$)
2. $d(x,y)=d(y,x)$ לכל x,y
3. $d(x,z) \leq d(x,y)+d(y,z)$ גם מוכר כאי שוויון המשולש.

דוגמה : על מרחב נורמי נגדיר מטריקה ע״י $d(x,y)=||x-y||$. למשל, הנורמה האוקלידית ב$\mathbb{R}^n$ מגדירה את המטריקה האוקלידית על $\mathbb{R}^n$ כדלהלן : $d\big((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)\big)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$

יהי M מרחב מטרי $A \subseteq M$ אזי על A נוכל להגדיר מטריקה ע״י צמצום המטריקה מM.

הגדרה : הספרה הn מימדית היא $S^n=\{(x_1,\dots,x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2=1\}$.

דוגמה : אם X קבוצה כלשהי, המטריקה הדיסקרטית על X היא מטריקה המוגדרת כך : $d(x,y)=\begin{cases}0, x=y\\1, x\neq y\end{cases}$

ברור שתנאים 1 ו2 מתקיימים. ננסה להוכיח את התנאי השלישי (אי שוויון המשולש).

הגדרה : יהי (M,d) מרחב מטרי ותהי $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ סדרת נקודות בM ויהי $a \in M$. אנו נאמר ש x_n מתכנסת לa ונסמן $\lim_{n\to\infty} x_n=a$ אם לכל $\varepsilon>0$ קיים n_0 כך שלכל $n \geq n_0$ מתקיים $d(x_n,a)<\varepsilon$.

טענה : תהי $\{x_n\}$ סדרה בM אזי x_n מתכנסת לכל היותר לנקודה אחת.

הוכחה : נניח בשלילה שיש $a \neq b$ כך ש $x_n \to a, x_n \to b$. יהי $\varepsilon=\frac{d(a,b)}{2}$. כעת, מכיוון ש$x_n \to a$, יש n_0 כך שלכל $n \geq n_0$ מתקיים $d(x_n,a)<\varepsilon$. כמו כן, קיים n_1 כך שלכל $n \geq n_1$ מתקיים $d(x_n,b)<\varepsilon$. כעת, ניקח $m \gg n_0,n_1$, אזי $d(a,b) \leq d(a,x_n)+d(x_n,b)<\varepsilon+\varepsilon=d(a,b)$, וזו סתירה! מ.ש.ל.■

<u>תרגיל בית</u> : $x_n \to a$ או״א $d(x_n,a) \to 0$.

הגדרה : תהי $\{x_n\}$ סדרה במרחב מטרי M. $\{x_n\}$ תקרא סדרת קושי אם לכל $\varepsilon>0$ יש n_0 כך שלכל $n,m \geq n_0$ מקיים $d(x_n,x_m)<\varepsilon$.

טענה : אם סדרה מתכנסת אז היא סדרת קושי.

הוכחה : נניח כי $\{x_n\}$ מתכנסת לa. יהי $\varepsilon>0$ קיים $n_1>0$כך שלכל $n \geq n_1$ מתקיים $d(x_n,a)<\frac{\varepsilon}{2}$. לכן, אם $m,n \geq n_1$ נקבל כי $d(x_n,x_m) \leq d(x_n,a)+d(x_m,a)<\varepsilon$. מ.ש.ל. ■

הגדרה : מרחב מטרי שבו כל סדרת קושי מתכנסת נקרא מרחב מטרי שלם.

דוגמה למרחב מטרי שבה אין תת סדרה קושי : $\mathbb{N}$ עם המטריקה הדיסקרטית. המרחק בין כל שתי איברים הוא 1, ואין לה אף תת סדרת קושי.

הגדרה : יהי (M,d) מ״מ. יהי $a \in M$, יהי $r>0$.

נגדיר את הכדור הפתוח ברדיוס r סביב a באופן הבא : $B(a,r)=\{x \in M : d(a,x)<r\}$.

במקום להגיד $d(x_n,a)<r$, נוכל פשוט להגיד $x_n\in(a,r)$.

הגדרה : יהיו (M,d) , (N,ρ) שני מרחבים מטריים, $f:M\to N$ ו$a\in M$. נאמר שf רציפה בa אם לכל $\varepsilon>0$ יש $\delta>0$ כך שלכל x המקיים $d(x,a)<\delta$ מתקיים $\rho\big(f(x),f(a)\big)<\varepsilon$. (או לחילופין : $f\big(B^M(a,\delta)\big)\subseteq B^N(f(a),\varepsilon)$)

משפט : יהיו $(M,d),(N,\rho)$ מרחבים מטריים. $f:M\to N$ פונקציה. עבור $a\in M$ נאמר שf רציפה בa או״א לכל סדרת נקודות x_n בM המקיימת $x_n\to a$ מתקיים ש$f(x_n)\to f(a)$.

הוכחה : נניח כי הפונקציה רציפה. עבור סדרה x_n שמקיימת $x_n\to a$ צריך להוכיח ש$f(x_n)\to f(a)$. נתון $\varepsilon>0$. f רציפה ולכן קיים $\delta>0$ כך ש$f(B(a,\delta)\subseteq B(f(a),\varepsilon)$. ידוע כי $x_n\to a$, ולכן יש n_0 כך שלכל $n\geq n_0$ וגם $x_n\in B(a,\delta)$. ולכן $f(x_n)\in B(f(a),\varepsilon)$.

כעת נוכיח את השלילה של הכיוון השני. נניח שf לא רציפה בa. צ״ל שקיימת סדרת x_n בM המקיימת $x_n\to a$ אך $f(x_n)\to f(a)$. נבנה סדרה שמקיימת את זה. מתוך כך שf אינה רציפה אנו יודעים כי קיים $\varepsilon>0$ כך שלכל $\delta>0$ בפרט ל$\delta=\frac{1}{n}$. יש $x\in M$ כך ש$d(a,x)<\frac{1}{n}$ ובכל זאת $\rho\big(f(x),f(a)\big)\geq\varepsilon$. נבחר x כזה ונסמנו x_n. נעשה זאת לכל n ונקבל סדרת נקודות $\{x_n\}$ בM כך ש$d(x_n,a)<\frac{1}{n}$ ו$\rho\big(f(x_n),f(a)\big)\geq\varepsilon$ לכל n. אנו יודעים כי $d(x_n,a)\to 0$ ולכן $x_n\to a$, ובכל זאת נקבל $f(x_n)$ לא מתכנסת ל$f(a)$. מ.ש.ל. ■

הגדרה : יהי M מ״נ. אזי קבוצה $A\subseteq M$ תקרא פתוחה בM אם לכל $a\in A$ יש $r>0$ כך ש$B(a,r)\subseteq A$.

טענה : עבור X עם המטריקה הדיסקרטית כל תת קבוצה היא פתוחה בX.

אנו יודעים כי $B(a,1)=\{a\}$, $B(a,3)=X$, $B(a,7)=X$. מכאן והלאה נסמן את המטריקה הדיסקרטית כdisc.

טענה : כדור פתוח הוא קבוצה פתוחה.

הוכחה : יהי $B(a,r)$ כדור פתוח במרחב מטרי M תהי $x\in B(a,r)$ צריך למצוא $\varepsilon>0$ כך ש$B(x,\varepsilon)\subseteq B(a,r)$. כעת, ניקח $\varepsilon=r-d(x,a)$ ונוכיח כי $B(x,\varepsilon)\subseteq B(a,r)$. כלומר, אם $d(y,x)<\varepsilon$ אז $d(y,a)<r$. אכן $d(y,a)\leq d(y,x)+d(x,a)<\varepsilon+d(x,a)=r$. מ.ש.ל. ■

משפט : יהי M מ״מ. אזי מתקיים :

א. M וΦ פתוחות.
ב. אם $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ אוסף כלשהו של קבוצות פתוחות בM אזי $\cup_{\alpha\in I}U_\alpha$ קבוצה פתוחה בM.
ג. אם $U_1,U_2,\dots,U_n$ אוסף סופי של קבוצות פתוחות אז $U_n\cap\dots\cap U_1$ קבוצה פתוחה.

הוכחה :

א. זה טריוויאלי.
ב. יהי $a\in\cup_{\alpha\in I}U_\alpha$ יש $\beta\in I$ כך ש$a\in U_\beta$. U_β פתוחה ולכן קיים $r>0$ כך ש$B(a,r)\subseteq U_\beta\subseteq\cup_{\alpha\in I}U_\alpha$.
ג. יהי $a\in U_n\cap\dots\cap U_1$. לכל $1\leq i\leq n$ מתקיים עי $a\in U_i$. לכן יש $r_i>0$ כך ש$B(a,r_i)\subseteq U_i$ נזמן $r=\min\{r_1,r_2,\dots,r_n\}$ אזי $r>0$ ומתקיים $B(a,r)\subseteq U_i$ לכל $1\leq i\leq n$ לכן $B(a,r)\subseteq U_n\cap\dots\cap U_1$

מ.ש.ל.■

הגדרה : יהי M מ״מ. $a\in M$. סביבה של a היא קבוצה פתוחה $U\subseteq M$ כך ש$a\in U$.

טענה : יהי M,N מ"מ , $f: M \to N$ פונקציה. $a \in M$ אזי f רציפה בa או"א לכל סביבה V של f(a) בN יש סביבה U של a בM כך ש$V \subseteq f(U)$.

הוכחה : נניח f רציפה בנקודה a, ותהי V סיבה על f(a). אזי כיוון שV פתוחה ו$f(a) \in V$ יש $\varepsilon > 0$ כך ש$\subseteq B(f(a), \varepsilon)$ V. f רציפה בa, לכן יש $\delta > 0$ כך ש$f\big(B(a,\delta)\big) \subseteq B(f(a), \varepsilon) \subseteq V$ וניקח $U = B(a, \delta)$.

בכיוון השני , נניח כי התנאי על הסביבות מתקיים. יהא נתון $\varepsilon > 0$. $B(f(a), \varepsilon)$ סביבה של f(a), לכן קיימת סביבה U של a כך ש$f(U) \subseteq B(f(a), \varepsilon)$. U פתוחה, a נמצאת בU, ולכן יש $\delta > 0$ כך ש$B(a, \delta) \subseteq U$ ומתקיים$\subseteq f\big(V(a,\delta)\big)$ $f(U) \subseteq B(f(a), \varepsilon)$.

מ.ש.ל. ■