פתרון תרגיל 2 – לינארית

<u>שאלה 1:</u>

<u>סעיף א':</u>

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&2&1\\1&1&1&2\\1&1&3&0\end{array}\right)\xrightarrow{R_3-R_2\to R_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&2&1\\1&1&1&2\\0&0&2&-2\end{array}\right)\xrightarrow{R_1-R_2\to R_1}\left(\begin{array}{ccc|c}0&0&1&-1\\1&1&1&2\\0&0&2&-2\end{array}\right)\xrightarrow[\frac{1}{2}R_3\to R_3]{R_1\leftrightarrow R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&2\\0&0&1&-1\\0&0&1&-1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3-R_2\to R_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&2\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

קיבלנו צורה מדורגת ולכן $x_3=-1$. נשים לב שיש שורת אפסים ולכן נסמן $x_2=t$ ונביע את x_1 באמצעות t: $x_1=3-t \Leftarrow x_1+t-1=2$ והתוצאה הסופית היא $x_1=3-t, x_2=t, x_3=-1$.

<u>סעיף ב':</u>

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2&1&1&1\\1&1&1&2\\3&1&1&3\end{array}\right)\xrightarrow{R_1-2R_2\to R_1}\left(\begin{array}{ccc|c}0&-1&-1&-3\\1&1&1&2\\3&1&1&3\end{array}\right)\xrightarrow[-R_1\to R_1]{R_2+R_1\to R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}0&1&1&3\\1&0&0&-1\\3&1&1&3\end{array}\right)\xrightarrow{R_3-3R_2\to R_3}\left(\begin{array}{ccc|c}0&1&1&3\\1&0&0&-1\\0&1&1&6\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3-R_1\to R_3}\left(\begin{array}{ccc|c}0&1&1&3\\1&0&0&-1\\0&0&0&3\end{array}\right)$$

קיבלנו משוואה מהצורה $0=3$ ולכן אין פתרון למשוואה.

<u>סעיף ג':</u>

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&4&-7&3\\3&-1&1&5&2\\2&1&3&-2&1\end{array}\right)\xrightarrow{R_2-3R_1\to R_2}\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&4&-7&3\\0&-7&-11&26&-7\\2&1&3&-2&1\end{array}\right)\xrightarrow{R_3-2R_1\to R_3}\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&4&-7&3\\0&-7&-11&26&-7\\0&-3&-5&12&-5\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-R_2\to R_2}\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&4&-7&3\\0&7&11&-26&7\\0&-3&-5&12&-5\end{array}\right)\xrightarrow{7R_3+3R_2\to R_3}\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&4&-7&3\\0&7&11&-26&7\\0&0&-2&6&-14\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2}R_3\to R_3}\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&4&-7&3\\0&7&11&-26&7\\0&0&1&-3&7\end{array}\right)\xrightarrow{R_2-11R_3\to R_2}\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&4&-7&3\\0&7&0&7&-70\\0&0&1&-3&7\end{array}\right)\xrightarrow{\frac{1}{7}R_2\to R_2}\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&4&-7&3\\0&1&0&1&-10\\0&0&1&-3&7\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1-2R_2\to R_1}\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&4&-9&-17\\0&1&0&1&-10\\0&0&1&-3&7\end{array}\right)\xrightarrow[3R_2+R_3\to R_2]{R_1-3R_3\to R_1}\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&1&0&-38\\0&1&3&0&-23\\0&0&1&-3&7\end{array}\right)$$

כעת, נשים לב שיש יותר משתנים ממשוואות לכן נסמן $w=t$ ונביע את המשתנים האחרים באמצעותו:

$$\begin{cases}z-3t=7\Rightarrow z=3t+7\\y+9t+21=-23\Rightarrow y=-9t-44\\x+3t+7=-38\Rightarrow x=-3t-45\end{cases}$$

והפתרון של המשוואה הוא $x=-3t-45, y=-9t-44, z=3t+7, w=t$.

שאלה 2:

סעיף א':

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 2 & 0 \\ 2 & 4 & a^2 & 0 \\ a & 4 & 4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2-2R_1\to R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 2 & 0 \\ 0 & 4-2a & a^2-4 & 0 \\ a & 4 & 4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-aR_1\to R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 2 & 0 \\ 0 & 4-2a & a^2-4 & 0 \\ 0 & 4-a^2 & 4-2a & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3-\frac{2+a}{2}R_2\to R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 2 & 0 \\ 0 & 4-2a & a^2-4 & 0 \\ 0 & 0 & 2(2-a)-\frac{2+a}{2}\left(a^2-4\right) & 0 \end{array}\right)$$

כעת, נבדוק את כל האפשרויות:

$$\begin{cases} a=2 \\ a=-2 \\ a\neq -2,2 \end{cases}$$

עבור המקרה הראשון קיימים אינסוף פתרונות מכיוון ששתי השורות האחרונות מתאפסות והפתרון הוא $x=-2t-2s, y=t, z=s$.

עבור המקרה השני נקבל פתרון יחיד:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{array}\right)$$ ולכן הפתרון הוא $x=0, y=0, z=0$.

עבור המקרה השלישי נקבל:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 2 & 0 \\ 0 & 4-2a & a^2-4 & 0 \\ 0 & 0 & 2(2-a)-\frac{2+a}{2}\left(a^2-4\right) & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{4-2a}R_2\to R_2]{\frac{1}{2(2-a)-\frac{2+a}{2}\left(a^2-4\right)}R_3\to R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{a+2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

ולכן קיים פתרון יחיד והוא $x=0, y=0, z=0$.

סעיף ב':

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ a & 4 & 1 & 5 \\ 6 & a+2 & 2 & 13 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3-6R_1\to R_3]{R_2-aR_1\to R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 4-a & 1-a & 5-6a \\ 0 & a-4 & -4 & -23 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3+R_2\to R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 4-a & 1-a & 5-6a \\ 0 & 0 & -3-a & -18-6a \end{array}\right)$$

כעת, נבדוק את כל האפשרויות:

$$\begin{cases} a=4 \\ a=1 \\ a=\frac{5}{6} \\ a=-3 \\ a\neq 4,1,\frac{5}{6},-3 \end{cases}$$

עבור המקרה הראשון נקבל $\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&6\\0&0&-3&-19\\0&0&0&7\end{array}\right) \xrightarrow{3R_3-7R_2\to R_3} \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&6\\0&0&-3&-19\\0&0&-7&-42\end{array}\right)$ ולכן אין פתרון.

עבור המקרה השני נקבל $\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&6\\0&3&0&-1\\0&0&-4&-24\end{array}\right)$ ולכן קיים פתרון יחיד $x=\frac{1}{3}, y=-\frac{1}{3}, z=6$.

עבור המקרה השלישי נקבל $\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&6\\0&23&1&0\\0&0&1&6\end{array}\right) \xrightarrow[-\frac{6}{23}R_3\to R_3]{6R_2\to R_2} \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&6\\0&\frac{23}{6}&\frac{1}{6}&0\\0&0&-\frac{23}{6}&-23\end{array}\right)$ ולכן קיים פתרון

יחיד $x=\frac{6}{23}, y=-\frac{6}{23}, z=6$.

עבור המקרה הרביעי נקבל $\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&6\\0&7&4&23\\0&0&0&0\end{array}\right)$ ולכן יש אינסוף פתרונות מהצורה

$x=\frac{19-3t}{7}, y=\frac{23-4t}{7}, z=t$.

עבור המקרה האחרון נקבל $\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&6\\0&4-a&1-a&5-6a\\0&0&-3-a&-18-6a\end{array}\right)$ ולכן קיים פתרון יחיד

$x=-\frac{1}{a-4}, y=\frac{1}{a-4}, z=6$.

<u>שאלה 3:</u>

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&5&1\\1&2&5&0\\3&-1&a-b-5&-a-b-7\end{array}\right) \xrightarrow{R_1-R_2\to R_2} \left(\begin{array}{ccc|c}1&3&5&1\\0&1&0&1\\3&-1&a-b-5&-a-b-7\end{array}\right) \xrightarrow{R_3-3R_1\to R_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&5&1\\0&1&0&1\\0&-10&a-b-20&-a-b-10\end{array}\right) \xrightarrow{R_3+10R_2\to R_3} \left(\begin{array}{ccc|c}1&3&5&1\\0&1&0&1\\0&0&a-b-20&-a-b\end{array}\right)$$

לכן, הפתרון יהיה $x=\frac{3a+7b+40}{a-b-20}, y=1, z=-\frac{a+b}{a-b-20}$.

שאלה 4:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&2&b_1\\3&-4&-8&b_2\\1&3&6&b_3\\1&1&-1&b_4\end{array}\right)\xrightarrow[R_3-R_4\to R_3]{R_2-3R_3\to R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&2&b_1\\0&-13&-26&b_2-3b_3\\0&2&7&b_3-b_4\\1&1&-1&b_4\end{array}\right)\xrightarrow{R_4-R_1\to R_4}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&2&b_1\\0&-13&-26&b_2-3b_3\\0&2&7&b_3-b_4\\0&-1&-3&b_4-b_1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3+2R_4\to R_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&2&b_1\\0&-13&-26&b_2-3b_3\\0&0&1&b_3-b_1-b_4\\0&-1&-3&b_4-b_1\end{array}\right)\xrightarrow{R_2-13R_4\to R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&2&b_1\\0&0&13&b_2-3b_3-13b_4+13b_1\\0&0&1&b_3-b_1-b_4\\0&-1&-3&b_4-b_1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_4}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&2&b_1\\0&-1&-3&b_4-b_1\\0&0&1&b_3-b_1-b_4\\0&0&13&b_2-3b_3-13b_4+13b_1\end{array}\right)\xrightarrow{R_4-13R_3\to R_4}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&2&b_1\\0&-1&-3&b_4-b_1\\0&0&1&b_3-b_1-b_4\\0&0&0&b_2-16b_3+26b_1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2+3R_3\to R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&2&b_1\\0&-1&0&-4b_1+3b_3-2b_4\\0&0&1&b_3-b_1-b_4\\0&0&0&b_2-16b_3+26b_1\end{array}\right)\xrightarrow[-R_1\to R_1]{R_1+2R_2-2R_3\to R_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&-5b_1+4b_3-2b_4\\0&1&0&4b_1-3b_3+2b_4\\0&0&1&b_3-b_1-b_4\\0&0&0&b_2-16b_3+26b_1\end{array}\right)$$

כעת, נשים לב שאם $b_2-16b_3+26b_1\neq 0$ נקבל משוואה לא הגיונית ולכן נקבל לא יהיה פתרונות.

אחרת, יהיה פתרון מהצורה $x=-5b_1+4b_3-2b_4,\ y=4b_1-3b_3+2b_4,\ z=b_3-b_1-b_4$.

לכן, בסה"כ:

אם $b_2-16b_3+26b_1\neq 0$ אין פתרונות.

אם $b_2-16b_3+26b_1=0$ קיים פתרון יחיד מהצורה:

$x=-5b_1+4b_3-2b_4,\ y=4b_1-3b_3+2b_4,\ z=b_3-b_1-b_4$.

שאלה 5:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&i&1+i&2\\-i&1&0&2\\1+i&0&1&2\end{array}\right)\xrightarrow[R_3+R_2-R_1\to R_3]{R_2+iR_1\to R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&i&1+i&2\\0&0&-1+i&2+2i\\0&1-i&-i&2\end{array}\right)\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&i&1+i&2\\0&1-i&-i&2\\0&0&-1+i&2+2i\end{array}\right)$$

ולכן קיים פתרון $z=\frac{2+2i}{-1+i}=\frac{2(1+i)(-1-i)}{-2}=(1+i)^2=2i$ נציב במשוואה השנייה לקבל

$(1-i)y+2=2 \Leftarrow y=0$. כעת, נציב במשוואה הראשונה $x+2i-2=2 \Leftarrow x=4-2i$.

בסה"כ קיבלנו $x=2,\ y=0,\ z=2i$.

שאלה 6:

$$\begin{pmatrix}4&0&1&5\\1&2&2&1\\0&3&6&3\\2&1&4&0\end{pmatrix}\xrightarrow[2R_2-R_4\to R_2]{\frac{1}{3}R_3\to R_3}\begin{pmatrix}4&0&1&5\\0&3&0&2\\0&1&2&1\\2&1&4&0\end{pmatrix}\xrightarrow{2R_4-R_1\to R_4}\begin{pmatrix}4&0&1&5\\0&3&0&2\\0&1&2&1\\0&2&7&-5\end{pmatrix}\xrightarrow{R_4-2R_3\to R_4}\begin{pmatrix}4&0&1&5\\0&3&0&2\\0&1&2&1\\0&0&3&-7\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{3R_3-R_2\to R_3}\begin{pmatrix}4&0&1&5\\0&3&0&2\\0&0&6&1\\0&0&3&-7\end{pmatrix}\xrightarrow{2R_4-R_3\to R_4}\begin{pmatrix}4&0&1&5\\0&3&0&2\\0&0&6&1\\0&0&0&-15\end{pmatrix}\xrightarrow[-\frac{1}{15}R_4\to R_4]{6R_1-R_3\to R_1}\begin{pmatrix}24&0&0&29\\0&3&0&2\\0&0&6&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{R_1-29R_4\to R_1\\R_2-2R_4\to R_2\\R_3-R_4\to R_3}}\begin{pmatrix}24&0&0&0\\0&3&0&0\\0&0&6&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{\frac{1}{24}R_1\to R_1\\\frac{1}{3}R_2\to R_2\\\frac{1}{6}R_3\to R_3}}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$