

זמן המבחן: 3 שעות. חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד. משקל כל שאלה 24 נק', ענו על כל השאלות.

1. חשבו את הגבולות הבאים:

א.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x) \cdot (1 - \cos(x)) \cdot \cos(e^x)}{x \sin(x)}$     ב.  $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x - x^e$     ג.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n}$

2. תהי פונקציה  $f$  כך שלכל  $x \in \mathbb{R}$  מתקיים  $f'(x) \geq 1$ .

תהי סדרה  $a_n$  כך שלכל  $n$  מתקיים  $a_{n+1} = f(a_n)$ , וגם  $a_1 \leq a_2$ .

(רמז: הביטו בפונקציה  $h(x) = f(x) - x$ .)

א. הוכיחו כי  $a_n$  מונוטונית עולה, כלומר לכל  $n$  מתקיים כי  $a_{n+1} \geq a_n$ .

ב. הוכיחו/הפריכו:  $a_n \rightarrow \infty$ .

3. תהינה  $g, h$  גזירות ב  $x = 0$ , ונביט בפונקציה  $f(x) = \begin{cases} g(x) & x \geq 0 \\ h(x) & x < 0 \end{cases}$

א. הוכיחו:  $f$  גזירה ב  $x = 0$  אם ורק אם  $h(0) = g(0)$  וגם  $h'(0) = g'(0)$ .

ב. הוכיחו/הפריכו:  $f(x)$  רציפה ב  $x = 0$  אם ורק אם  $f(x^2)$  גזירה ב  $x = 0$ .

4. נביט בפונקציה  $f(x) = \frac{x}{e^x}$ .

א. מצאו כמה פתרונות יש למשוואה  $f(x) = \frac{1}{e^2}$  והוכיחו.

ב. מצאו את המקסימום והמינימום של  $f(x)$  בקטע  $[-1, \infty)$ , הוכיחו תשובתכם.

5. תהי  $f$  גזירה בכל  $\mathbb{R}$ , כך שנגזרתה רציפה בכל  $\mathbb{R}$ . עוד נניח כי למשוואה  $f'(x) = 0$  קיים פתרון יחיד.

א. הוכיחו שאם ל  $f$  יש מינימום מקומי, הוא מינימום גלובאלי.

ב. הוכיחו שאם  $f(1) = f(-1)$  אזי ל  $f$  יש נקודת קיצון מקומי.