מבחן לינארית 1 קיץ תשפ"ד מועד ב'

12.9.2024

מרצים: גיא בלשר, דניס גולקו, עוזי חרוש, ארז שיינר.
מתרגלים: עידו גולדנברג, רועי חסון, שירה ידעי, יונתן סמידוברסקי, עידו פלדמן, עידו קצב, ירדן שני.
הנחיות:

- ענו על כל השאלות.
- משך המבחן: שלוש שעות.
- חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.
- השאלות לא מסודרות בהכרח לפי רמת קושי – מומלץ להתחיל עם שאלות שאתם יודעים לפתור.
- יש לכתוב בכל תשובה פתרון מלא ומפורט.
- הניקוד לכל שאלה כתוב בתחילתה, והוא מתחלק באופן שווה בין הסעיפים.
- סך הנקודות במבחן הוא 109. ציון מעל 100 יעוגל ל-100.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שאתם יודעים לפתור. חלקו את זמנכם בתבונה!

תשובות יש לכתוב על גבי הטופס בלבד. מחברת הטיוטה לא תיבדק.

ניתן לענות משני צידי הדף.

בהצלחה!

שאלה 1. (10 נק' לכל סעיף) יהי $a \in \mathbb{R}$ פרמטר. נתבונן במטריצה

$$A = \begin{pmatrix} -a & a+2 & 2a \\ 2a+1 & -a-2 & -a^2-3a+6 \\ a & -a-2 & a^2-2a-4 \end{pmatrix}.$$

א. מצאו את כל ערכי הפרמטר a שעבורם המטריצה A אינה הפיכה.

ב. עבור $a=-1$, מצאו בסיס ומימד ל-$C(A)$ ול-$N(A)$.

ג. עבור $a=-1$, מצאו בסיס ומימד ל-$C(A) \cap N(A)$.

שאלה 2. (7 נק' לכל סעיף) יהי $V = \mathbb{R}_2[x]$, ויהי $B = \left\{1+3x, 3-2x^2, -1+x+x^2\right\}$.

א. הוכיחו כי הקבוצה B היא בסיס של V.

ב. נחשוב על B כבסיס סדור של V, ונניח שנתונה העתקה לינארית $T\colon V \to V$ שעבורה

$$[T]_B^B = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 8 \\ 1 & 1 & 2 \\ 10 & -6 & 4 \end{pmatrix}.$$

מצאו בסיס ומימד עבור $\ker T$ ועבור $\operatorname{Im} T$.

ג. עבור ההעתקה הלינארית T מהסעיף הקודם, מצאו בסיס סדור C של $\mathbb{R}_2[x]$ שעבורו

$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

יש להוכיח שהקבוצה C שמצאתם היא אכן בסיס של $\mathbb{R}_2[x]$.

שאלה 3. (7 נק' לכל סעיף) יהיו $v_1, v_2, v_3, v_4 \in \mathbb{R}^3$. נתון כי למשוואה $x_1v_1 + x_2v_2 = v_4$ קיים פתרון יחיד, וכי $v_3 \notin \operatorname{Span}\{v_1, v_2, v_4\}$.

א. הוכיחו כי הווקטורים v_1, v_2 בת"ל.

ב. הוכיחו כי הווקטורים v_1, v_2, v_3 מהווים בסיס ל-$\mathbb{R}^3$.

ג. מצאו את כל ערכי הפרמטר הממשי a שעבורו הווקטורים

$$v_1 = \begin{pmatrix} a \\ a \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ -a \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ a^2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

מקיימים את נתוני השאלה.

שאלה 4. (8 נק' לכל סעיף) יהי V מרחב וקטורי נוצר סופית מעל שדה $\mathbb{F}$, ויהיו $U_1, U_2, W \leq V$ תת־מרחבים של V.

א. <u>הוכיחו או הפריכו:</u> אם $U_1 \cap W = U_2 \cap W = \{0\}$, אז $(U_1 + U_2) \cap W = \{0\}$.

ב. <u>הוכיחו או הפריכו:</u> אם כל בסיס של V מכיל בסיס של W, אז $W = \{0\}$ או $W = V$.

שאלה 5. (7 נק' לכל סעיף) יהיו U, V, W מרחבים וקטוריים נוצרים סופית מעל שדה $\mathbb{F}$, ותהיינה $T\colon U \to V$ ו-$S\colon V \to W$ העתקות לינאריות.
נגדיר העתקה לינארית $\tilde{S}\colon \operatorname{Im} T \to W$ לפי $\tilde{S}v = Sv$ (כלומר $\tilde{S}$ היא הצמצום של S לתמונה של T).
אין צורך להוכיח כי $\tilde{S}$ היא העתקה לינארית.

א. הוכיחו כי $\ker \tilde{S} = \ker S \cap \operatorname{Im} T$ וכי $\operatorname{Im} \tilde{S} = \operatorname{Im}(ST)$.

ב. הוכיחו כי $\dim \ker(ST) \leq \dim \ker T + \dim \ker S$.

ג. הוכיחו כי $\dim \ker(ST) = \dim \ker T + \dim \ker S$ אם ורק אם $\ker S \subseteq \operatorname{Im} T$.